99. Il Problema del Bagnino con Geogebra

a cura di Luca Frangella[1]

SUNTO L'argomento proposto in questo articolo è un classico problema di ottimizzazione, ideato dal fisico R. Feynman, che prelude al principio di Fermat e alla legge di Snell; ragion per cui è particolarmente indicato per la classe conclusiva di un Liceo Scientifico. Il problema viene affrontato con diversi metodi e da diversi punti. In particolare viene usato il free-software di geometria dinamica GeoGebra.

1 Formulazione generale del problema

Sulla riviera ligure un incauto bagnante che si trova a *b* metri dalla riva rischia di affogare e grida aiuto. Il bagnino, nel momento in cui si accorge del pericolo, si trova sulla spiaggia ad *a* metri dalla riva. In linea d'aria il bagnino e il bagnante distano inizialmente *d* metri, ma la linea immaginaria che li unisce non è perpendicolare alla riva. Il bagnino può correre sulla spiaggia con una velocità media di v_1 *m/s*, mentre in acqua può nuotare con una velocità media inferiore pari a v_2 *m/s*. Quale percorso deve compiere il bagnino affinché, a partire dalla sua posizione iniziale, arrivi nel più breve tempo possibile in soccorso del bagnante, evitando così che questi affoghi?

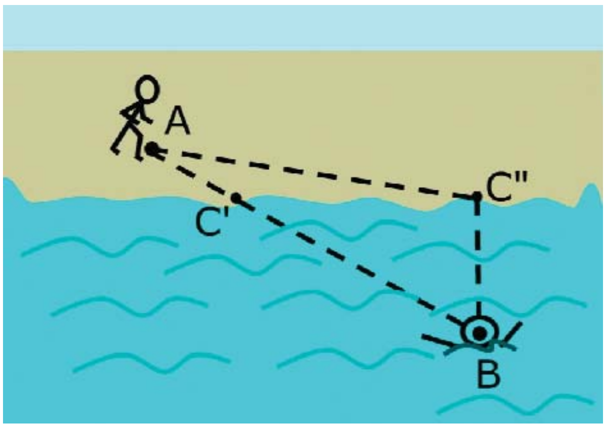


Figura 1. Il bagnino è i n A, il bagnante in pericolo è in B.

Dal testo si ricavano le seguenti informazioni essenziali:

- Il bagnino si trova inizialmente ad *a* metri dalla riva.
- Il bagnante sta affogando a *b* metri dalla riva (BC").
- La distanza iniziale fra il bagnino e il bagnante è *d* metri (AB).
- La linea immaginaria che unisce la posizione iniziale del bagnino con quella del bagnante non è perpendicolare alla riva.
- Il bagnino corre sulla spiaggia ad una velocità media di v_1 *m/s*.
- Il bagnino nuota in mare con una velocità media di v_2 *m/s*.
- $v_2 < v_1$

L'obiettivo è quello di individuare il percorso che deve compiere il bagnino per raggiungere nel più breve tempo possibile il bagnante.

2 Schematizzazione e rappresentazione geometrica

Utilizziamo il software "GeoGebra" per rappresentare graficamente il problema.

a) Tracciare una linea retta orizzontale che rappresenti la riva, ovvero la linea di separazione fra spiaggia e mare.
b) Segnare il punto *A* distante *a* dalla riva, che corrisponde alla posizione iniziale del bagnino.
c) Segnare il punto *B* distante *b* dalla riva e *d* dal punto *A*, in modo che il segmento *AB*, di misura *d*, non sia perpendicolare alla riva.

[1] Luca Frangella (lucafg@libero.it) è laureato in fisica, insegna Matematica e Fisica presso i Licei di Brescia, è stato esercitatore dei corsi fisica per ingegneri ha pubblicato sul sito italiano di Geogebra [1] diverse applicazioni matematiche, si occupa anche di fumetto, a scuola, in radio Radio Onda d'Urto e sul web http://www.distorsioni.net.

d) Tratteggiare le distanze *a, b, d.*
e) Indicare con *C* e *D* rispettivamente le proiezioni dei punti *A* e *B* sulla riva.
f) Indicare con *J* il punto di intersezione fra il segmento *AB* e la riva.
g) Indicare con *c* la misura del segmento *CD*.
h) Tratteggiare la retta parallela alla riva passante per *B* e la retta perpendicolare alla riva passante per *A*. Chiamare *E* il loro punto di intersezione.

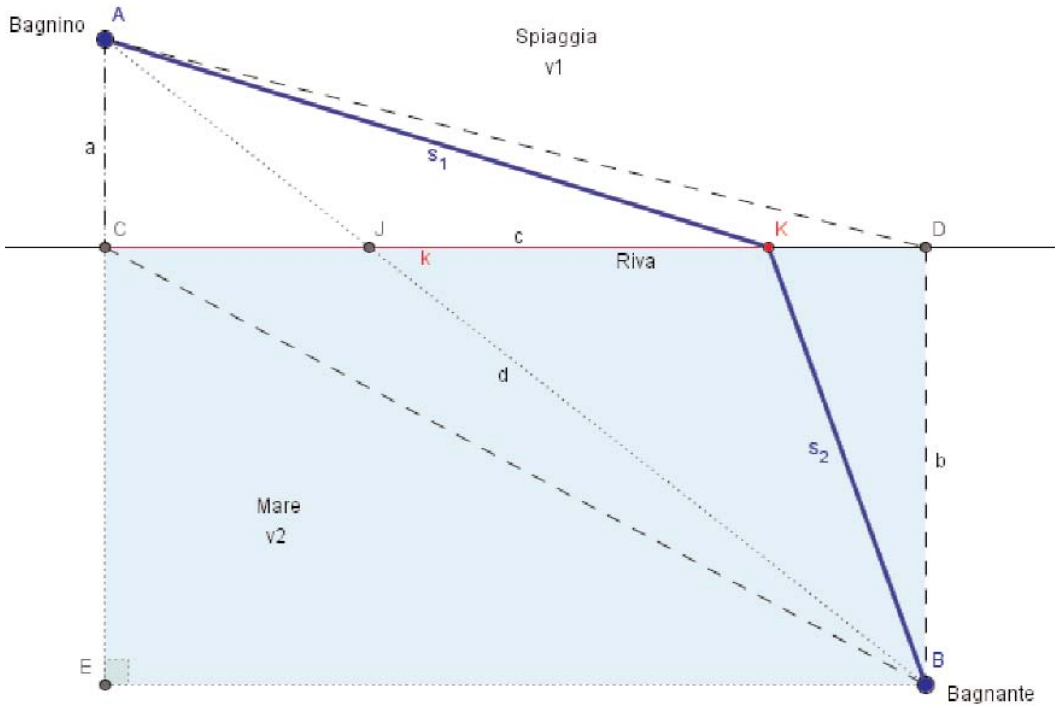


Figura 2. Una rappresentazione geometrica del problema del bagnino con Geogebra

Osserviamo che il segmento $AB = d$ rappresenta l'ipotenusa del triangolo rettangolo *AEB* avente come cateti $EB = CD = c$ e $AE = AC + CE = AC + BD = a + b$. Possiamo dunque calcolare c mediante il teorema di Pitagora: $c = \sqrt{d^2 - (a+b)^2}$.

3 Discussione preliminare sui possibili percorsi

Dalla cinematica sappiamo che la relazione fra tempo (t), spazio (s) e velocità media (v) è $s = v\,t$ da cui $t = s/v$. Dobbiamo considerare separatamente i tratti di spiaggia e quelli di mare, perché il bagnino corre e nuota con velocità diverse, rispettivamente $v_1 > v_2$.
Detto s_1 il tratto generico di spiaggia e s_2 quello di mare e detti t_1 e t_2 i rispettivi tempi di percorrenza di tali tratti, possiamo scrivere:

sulla spiaggia: $t_1 = \dfrac{s_1}{v_1}$ in mare: $t_2 = \dfrac{s_2}{v_2}$

Il tempo totale è dunque: $t_{tot} = t_1 + t_2$.
Facciamo ora delle considerazioni su alcuni percorsi possibili.

Il percorso di minima lunghezza è indubbiamente *AB*, e verrebbe da dire che sia anche quello di minimo tempo. Questo sarebbe sicuramente vero se il bagnino potesse nuotare tanto velocemente quanto corre sulla spiaggia, ovvero, se potesse mantenere una velocità costante per tutto il tragitto.
Ma notiamo come il tratto di mare *JB*, dove il bagnino deve nuotare, è molto più lungo rispetto al tratto di spiaggia *AJ*, dove invece il bagnino può correre. Viene spontaneo chiedersi se esistono percorsi non molto più lunghi di questo ma con una proporzione più favorevole fra tratti di spiaggia e di mare.
Le spezzate *ACB* e *ADB* rappresentano due percorsi nettamente più lunghi di *AB*. Ma osserviamo i tratti di spiaggia e di mare: *ACB* è molto meno favorevole rispetto ad *AB*, perché diminuisce il tratto di spiaggia (*AC*) ed aumenta quello in mare (*CB*); *ADB* presenta invece un tratto notevolmente più lungo di spiaggia (*AD*), e uno molto più breve di mare (*DB*). Quest'ultimo percorso, sebbene globalmente più lungo di *AB*, potrebbe essere compiuto in un tempo totale minore.

A questo punto sorge spontaneo il dubbio se non esista un punto *K*, compreso fra *J* e *D*, in cui il bagnino debba tuffarsi in mare e tale che la spezzata *AKB* sia il percorso di minimo tempo, sebbene non di minima lunghezza. Un simile percorso sarebbe globalmente meno lungo di *ADB* e allo stesso tempo continuerebbe ad avere un tratto di mare (*KB*) più corto di quello di spiaggia (*AK*).
Queste considerazioni possono variare leggermente a seconda della scelta dei punti *A* e *B* e dei valori *a, b, d* forniti dal problema, ma la logica è sempre la stessa.
In generale, bisogna sempre cercare un punto *K* compreso fra *C* e *D*, in cui il bagnino deve tuffarsi in mare per arrivare nel tempo più breve in soccorso del bagnante. Tale ragionamento può essere verificato grazie all'interattività dinamica di GeoGebra. Il file interattivo è disponibile on line in [2].

4 Esplorazione numerica

In riferimento alla figura 2, si prenda un punto qualsiasi *K* appartenente al segmento *CD*. Si traccino poi i segmenti *AK* e *KB* di lunghezza rispettivamente s_1 e s_2. Si definisca inoltre un segmento *CK* di lunghezza k. Si definiscano le variabili t_1, t_2, t_{tot} come indicato precedentemente, scegliendo per le velocità valori ragionevoli e realistici. Nell'esempio in figura sono stati scelti i valori $v_1 = 5\ m/s$, $v_2 = 3\ m/s$.
È possibile ora spostare con il mouse il punto *K* lungo il segmento *CD*. Di conseguenza varieranno dinamicamente tutte le variabili e i parametri introdotti e potremmo verificare numericamente la bontà delle considerazioni fatte. I dati poi possono essere raccolti in una tabella. Difatti GeoGebra è fornito di una finestra algebrica in cui vengono registrati e aggiornati in tempo reale tutti i parametri, le variabili e gli enti geometrici del problema.
Si noti che i valori di *a, b, d* sono fissati nel momento in cui vengono posizionati i punti *A* e *B*, e dunque spostando con il mouse la loro ubicazione, tali valori possono essere variati. In questo modo è possibile verificare numerose varianti del problema, rendendosi conto che il ragionamento fatto, seppure con qualche lieve differenza, è sempre corretto. In particolare troveremmo sempre un punto *K* compreso fra *C* e *D*, tale che il percorso *AKB* sia di minimo tempo; il punto *K* è numericamente identificato dalla misura del segmento *AK*, ovvero dal parametro *K*.

5 Soluzione analitica

Introduciamo una variabile indipendente, ovvero un'incognita *x*. Poniamo la misura del segmento $CK = x$; in tal modo $KD = c - x$. Calcoliamo in funzione di *x* i valori di s_1 e s_2 applicando il teorema di Pitagora ai triangoli rettangoli ACK e BDK:

$$s_1(x) = \sqrt{a^2 + x^2} \qquad s_2(x) = \sqrt{(c-x)^2 + b^2}$$

Scriviamo poi t_1, t_2, t_{tot} in funzione di *x*.

$$t_{tot}(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}}{v_2}, \quad x \in [0,c]$$

Poiché *K* è compreso fra *C* e *D*, la variabile *x* può variare fra *0* e *c*.
Il problema si riduce a trovare il punto di minimo assoluto della funzione $t_{tot}(x)$, continua e derivabile nell'intervallo di definizione che è chiuso e limitato. Il teorema di Weierstass ci assicura che tale punto esiste e si trova in corrispondenza o degli estremi dell'intervallo o di eventuali punti stazionari della funzione interni ad esso. Sappiamo già dalle precedenti considerazioni che tale punto si troverà all'interno dell'intervallo.
Procediamo pertanto alla ricerca dei punti stazionari.

6 Analisi grafica e numerica

Nello stesso foglio della costruzione geometrica immettiamo la funzione $f(x) = t_{tot}(x)$ nell'input di GeoGebra e visualizziamone il grafico. I valori di *a, b, c* e delle velocità *v1, v2* vengono automaticamente presi da quelli usati per la costruzione geometrica. Si nota immediatamente che all'interno dell'intervallo di definizione vi è un punto di minimo relativo.
È possibile introdurre un punto *G* di coordinate $G(k; t_{tot})$ e impostare il comando "Traccia". Spo-

stando con il mouse il punto *K* lungo il segmento *CD*, vedremo il punto *G* tracciare per punti una curva che va a sovrapporsi perfettamente al grafico della funzione, che a questo punto possiamo anche occultare. Introduciamo poi la tangente al grafico della funzione nel punto G utilizzando la nota relazione: $y = f\left(x_G\right) + f'\left(x_G\right)\cdot\left(x - x_G\right)$ dove x_G è l'ascissa del punto *G*.

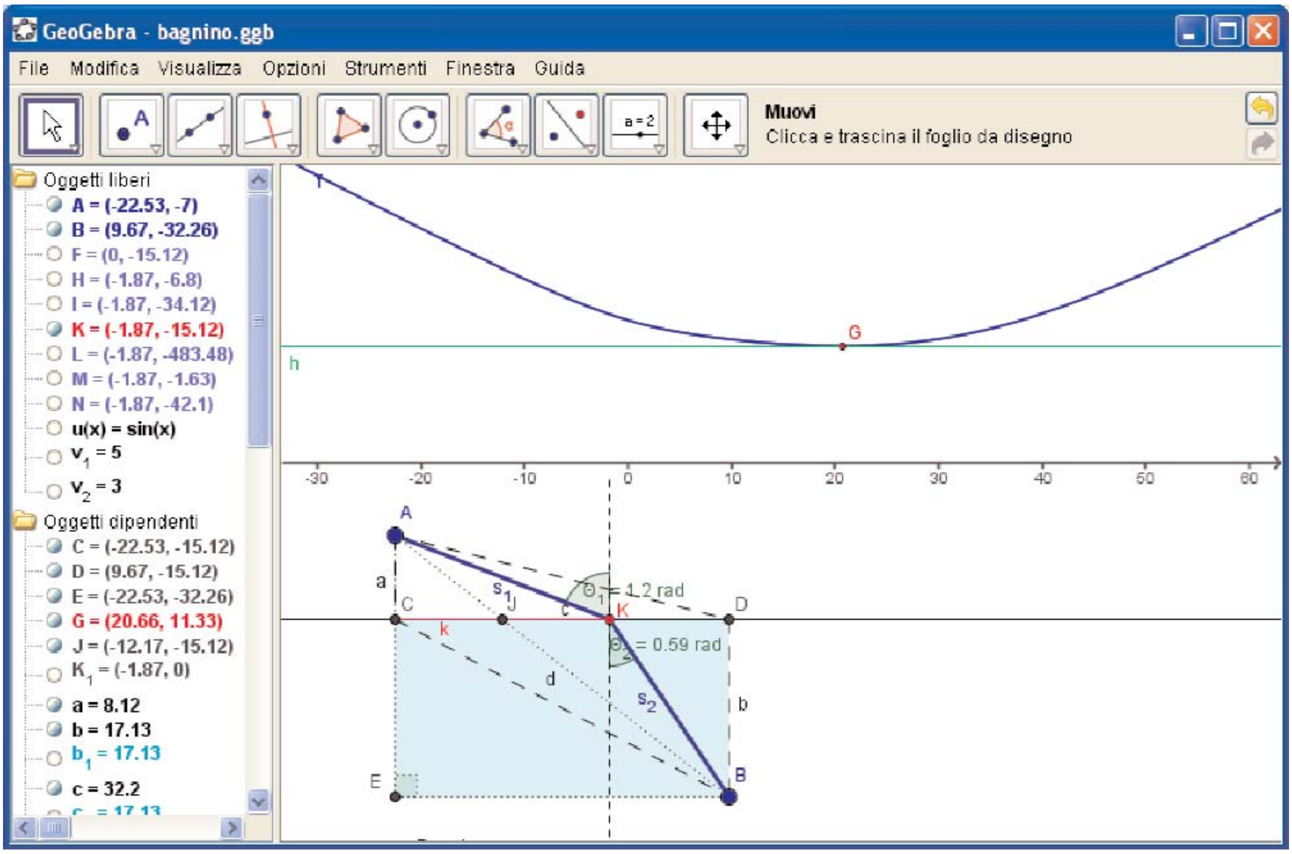


Figura 3. Finestra di Geogebra con la rappresentazione della funzione tempo totale.

Adesso è possibile individuare anche 'ad occhio', oltre che numericamente, la posizione ottimale del punto *K*. Infatti quando vedremo che la tangente è in posizione orizzontale, avremo individuato il punto stazionario della funzione. Possiamo inoltre spostare i punti *A* e *B* e quindi variare la costruzione geometrica. Automaticamente cambieranno la funzione, il suo grafico, ed il punto *G* permettendoci di analizzare numericamente e graficamente tutte le possibili situazioni.

7 Soluzione 'esatta'

Per risolvere analiticamente il problema bisogna derivare la funzione $t_{tot}(x)$ ed uguagliare a zero la derivata per individuare i punti stazionari.

$$t'_{tot}\left(x\right) = \frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c - x}{v_2\sqrt{\left(c - x\right)^2 + b^2}} = 0$$

Dalla risoluzione trigonometrica dei triangoli rettangoli *ACK* e *BDK*:

$$\frac{CK}{AK} = \cos\left(C\hat{K}A\right) \qquad \frac{KD}{KB} = \cos\left(B\hat{K}D\right)$$

Tracciamo la perpendicolare alla riva per il punto *K*. Chiamiamo θ_1 e θ_2 gli angoli che i segmenti *AK* e *KB* formano rispettivamente con tale perpendicolare; essi sono i corrispettivi complementari degli angoli *CKA* e *BKD*.

Poiché $\cos\left(90° - \theta\right) = \sin$, fatte le debite sostituzioni possiamo infine scrivere:

$$\frac{\sin\left(\theta_1\right)}{v_1} - \frac{\sin\left(\theta_2\right)}{v_2} = 0$$

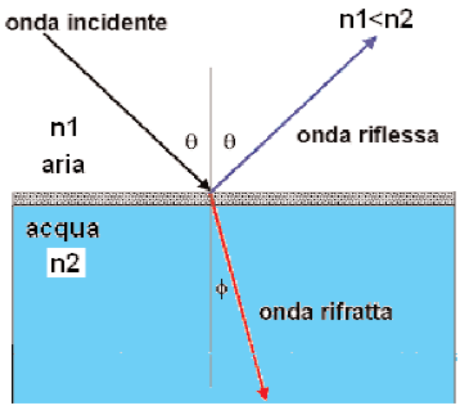
da cui invertendo ricaviamo:

(1) $$\frac{\sin\left(\theta_1\right)}{\sin\left(\theta_2\right)} = \frac{v_1}{v_2}$$

Con GeoGebra è possibile verificare numericamente questa soluzione introducendo gli angoli θ_1 e θ_2 e mettendo a confronto il rapporto dei loro seni con il rapporto delle velocità scelte. Muoviamo il punto K con il mouse: lì dove la funzione presenta il suo punto di minimo, i due rapporti si eguagliano; possiamo anche prendere nota dei valori degli angoli, sia in radianti che in gradi.

8 Legge di Snell e principio di Fermat

La formula (1) non è nient'altro che la legge di Snell, la quale descrive quantitativamente il fenomeno la rifrazione della luce all'interfaccia fra due mezzi trasparenti.
Ogni mezzo è caratterizzato da un indice di rifrazione $n=c/v$, dove c è la velocità della luce nel vuoto e v quella nel mezzo considerato. Maggiore è la densità del mezzo, minore è la velocità della luce quando lo attraversa.



$$\frac{\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_2)} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

Figura 4. La legge di Snell

Cosa accade dunque ad un raggio di luce quando passa, ad esempio, dall'aria all'acqua?
Non segue più un percorso rettilineo, ma una spezzata, come mostrato in figura.
In analogia con il nostro problema, la luce compie percorsi di minimo tempo fra due punti arbitrariamente scelti nello spazio.
Questo è noto come principio di Fermat: "*Il percorso fra due punti preso da un raggio di luce è quello che è attraversato nel minor tempo.*"

La versione completa e moderna del principio di Fermat afferma che il percorso ottico è *estremale;* ciò significa che in taluni casi può anche essere di massimo e non necessariamente di minimo tempo. Ma non è questa la sede per approfondire un tale argomento; basti sapere che i principi estremali che si riscontrano in natura sono tanti, uno fra tutti quello di minima azione, largamente usato in meccanica razionale [3, 4].

9 Alcune varianti del problema

Le seguenti varianti del problema del bagnino si prestano ad essere usate come esercitazione in classe, in quanto si basano essenzialmente sugli stessi ragionamenti.

Un ragazzo che si trova in un punto A, situato lungo un rettilineo di una strada di campagna, deve raggiungere la propria ragazza che si trova (ad aspettarlo ansiosamente!) in un casolare situato in un punto B, distante 8 km dalla strada, in mezzo ad un prato. La distanza in linea d'aria tra A e B è di 17 km. Il ragazzo può correre a 5 km/h sulla strada e a 3 km/h sull'erba del prato. In quale punto dovrà abbandonare la strada se, come è naturale, vuole raggiungere la propria ragazza nel più breve tempo possibile? [6]

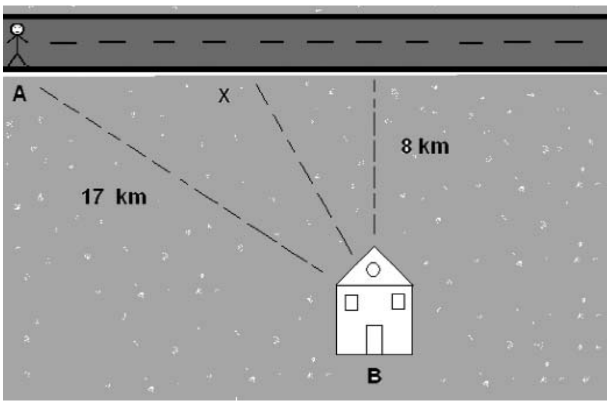


Figura 5. Il problema della ragazza da raggiungere.

Questa variante semplificata è molto interessante in quanto può essere risolta algebricamente.
Difatti, operate le considerazioni e i passaggi preliminari, si ottiene seguente funzione:

$$t_{tot} = \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{x^2 - 30x + 289}}{3}, \quad AX = x \in [0,15]$$

Derivando ed uguagliando a zero, si ottiene un'equazione irrazionale che dopo qualche discussione e qualche passaggio si riduce alla seguente:

$$x^2 - 30x + 189 = 0$$

le cui soluzioni sono: $x_1 = 9$ e $x_2 = 21$. La seconda non appartiene all'intervallo di definizione per cui non è accettabile. Dunque $AX = 9$ *metri*.

Si deve costruire un oleodotto che porti il petrolio da una piattaforma A in mezzo al mare ad un porto B sulla costa. Sapendo che le spese di costruzione sono pari a N $/m sulla terraferma ed M $/m in mare, si determini il percorso di minor costo. [4]

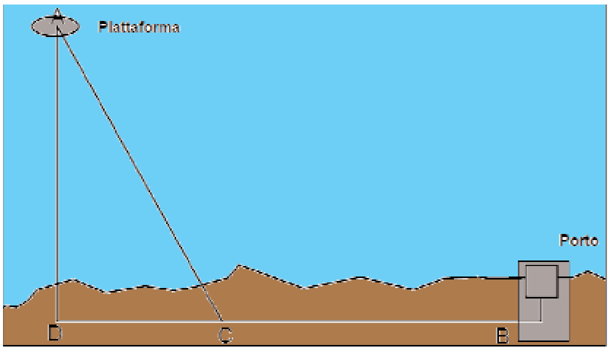


Figura 6. Il problema dell'oleodotto

Una ditta specializzata deve stendere una linea elettrica da Chiasso (Svizzera) a Como (Italia); le due città distano in linea d'aria 17 km e Como dista 8 km dal confine con la Svizzera. I costi per la messa in opera della linea sono di 80.000 euro al giorno lungo il confine Svizzero e di 60.000 euro al giorno in territorio italiano; ma gli operai Svizzeri in un giorno riescono a stendere 2 km di linea lungo il confine, mentre gli operai italiani nel loro territorio solo 1 km. Qual è il percorso che deve seguire la linea elettrica affinché il costo totale sia minimo? [Suggerimenti: è importante calcolare i costi per ogni km; arrivati all'equazione finale, arrotondate la radice di ¢/4 al numero intero più piccolo.]

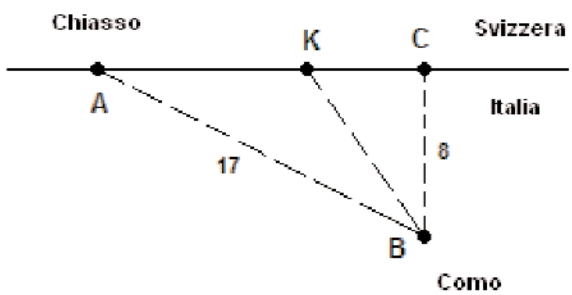


Figura 7. Il problema della linea elettrica

Conclusioni

L'argomento scelto è uno dei più affascinanti che possa essere trattato in un Liceo all'interno del programma di analisi matematica del V anno, soprattutto per le sue implicazioni scientifiche e tecnologiche che permettono di avvicinare i giovani ai processi di generalizzazione e di sintesi della scienza. L'utilizzo di un software interattivo e dinamico quale GeoGebra permette di trattare il problema con notevole semplicità, dando agli studenti un immediato riscontro grafico e numerico e aiutandoli nelle loro argomentazioni.

Bibliografia e sitografia

[1] Geogebra, articoli in italiano
http://www.geogebra.org/en/wiki/index.php/Italian
[2] L. Frangella, Il problema del bagnino
http://www.geogebra.org/en/upload/files/italian/lucagir/prob-bagnino.html
[3] F. Giannoni, V. Girolimetti "Problemi di Massimo e Minimo e Applicazioni"
http://www.unicam.it/matinf/pls/Materiale_06/Dispensa_Fermat.pdf
[4] B. Piochi, "Metodi elementari per la soluzione di problemi di minimo"
http://www.irre.lazio.it/matema/documenti/mpi/Analisi/B_Piochi.pdf
[5] O. Serra, "Principi estremali in Fisica"
http://digilander.libero.it/ottavioserra0/articoli/LiceoScientScorza/00%20PRINCIPI%20ESTREMALI%20FISICA.doc
[6] M. Falanga, L. Battaia, Batmath
http://www.batmath.it/