# Telproblemen

www.karelappeltans.be

February 17, 2023

## 1 Inleiding

**Gwenny is zwanger van haar 12e kindje en dat zal net als zijn broers en zussen een naam krijgen met letters A, E, L en X**

https://www.vrt.be/vrtnws/nl/2022/04/30/laex-is-de-naam-van-het-12de-kindje-van-gwenny-allemaal-r

## 2 Systematisch leren tellen

### 2.1 EN versus OF

**Basistechnieken**

**De productregel : EN $\rightarrow \cdot$**

Voorbeeld:

De stoelen van een auditorium zijn gelabeld: eerst een letter en vervolgens een natuurlijk getal kleiner dan 100

Wat is het maximaal aantal stoelen dat gelabeld kan worden?

Voorbeelden: (A,37) of (Z,18) of (D,0) of (J,99),... $\leftarrow$ de ronde haakjes gebruiken we als de volgorde belangrijk is.

$XX \leftarrow$ De eerste X staat voor de letter, de tweede X voor het cijfer

$\uparrow \ \uparrow$

$26 \cdot 100 = 2600$ mogelijkheden

$\#letters \cdot \#getallen$

**De somregel : OF $\rightarrow +$**

Voorbeeld:

Een student moet één project kiezen. Er kan gekozen worden uit drie lijsten. Deze drie lijsten bevatten respectievelijk 23, 15 en 19

Hoeveel mogelijke projecten zijn er om uit te kiezen?

Je kiest een project uit de eerste lijst OF één uit de tweede lijst OF één uit de derde lijst.

Totaal aantal mogelijkheden: 23+15+19=57 mogelijkheden

Figure 1: https://www.geogebra.org/m/m2h6yh47

## 2.2 basissituaties

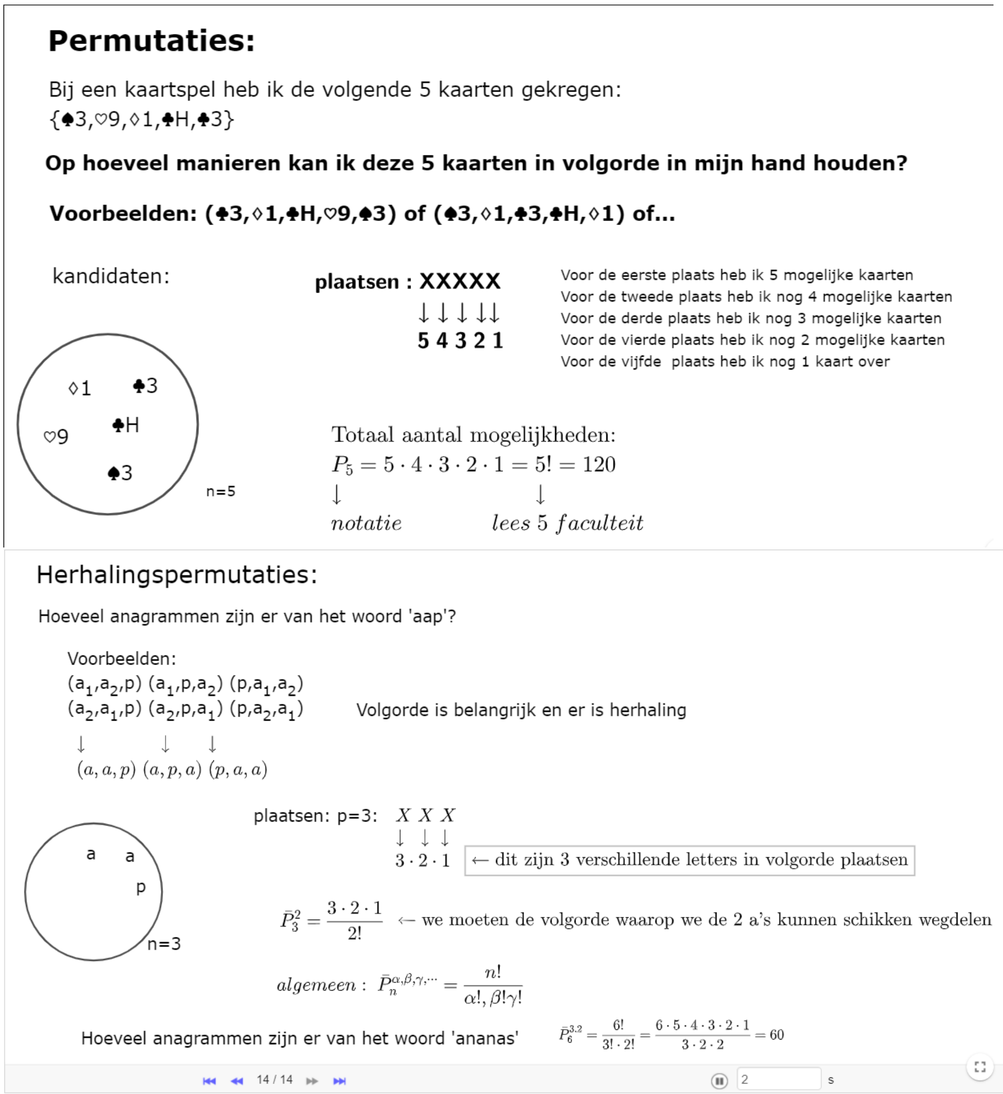



Figure 2: https://www.geogebra.org/m/m2h6yh47

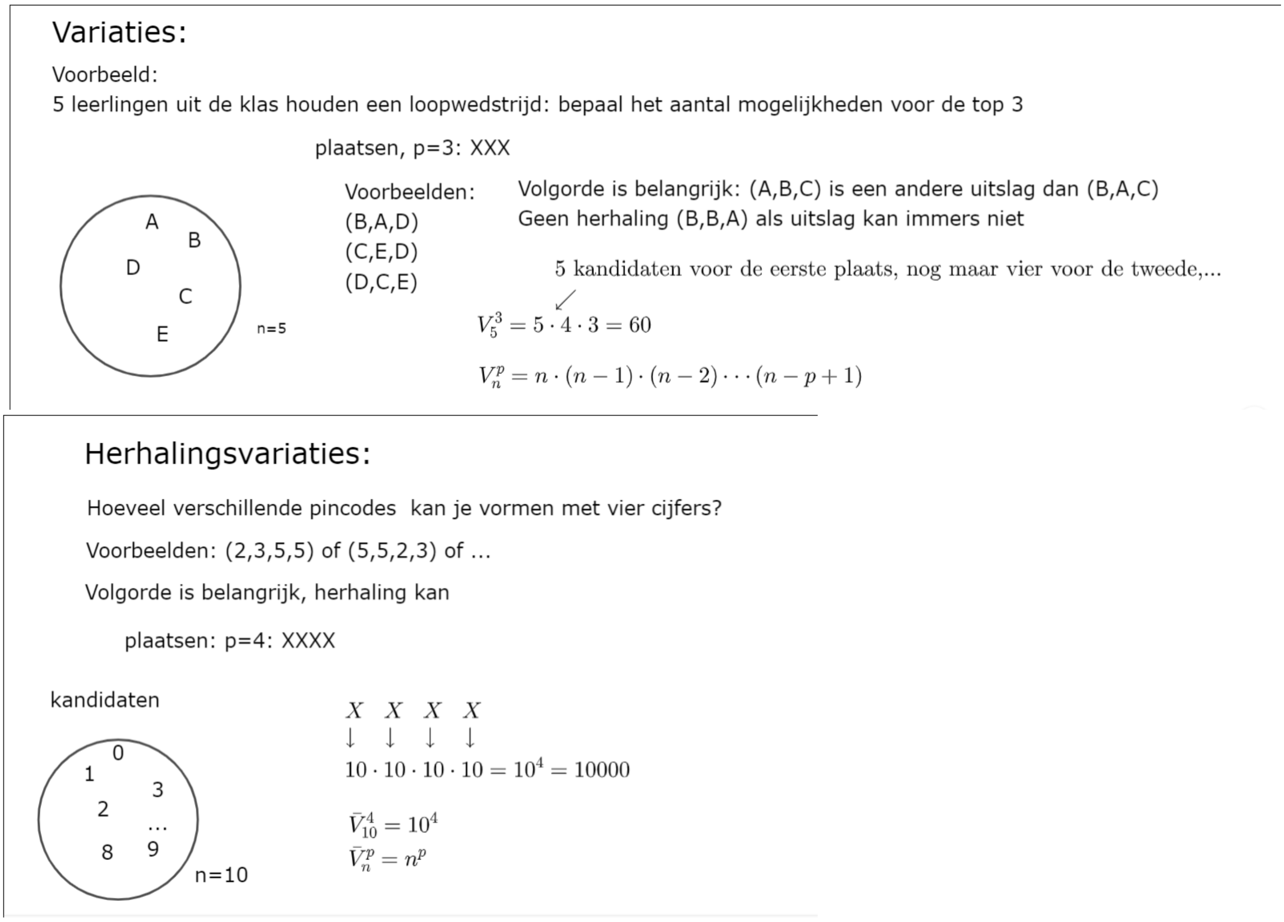



Figure 3: https://www.geogebra.org/m/m2h6yh47

## Combinaties

Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er om bij een pokerspel 5 kaarten te krijgen?

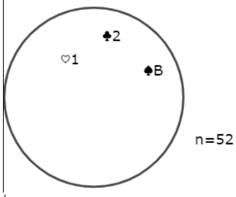
Voorbeelden:{♠3,♣10,♠1,◊K,♡5} of {♠1,♡2,♣7,♣D,◊3}

Volgorde is hier niet van tel: het maakt immers niet uit of ik in het eerste vb eerst ♠3 of eerst ♣10 gekrege

Herhaling van een element kan niet, in het eerste vb kan je ♠3 niet twee keer krijgen

$$\begin{array}{rccccc} plaatsen : 5 : & X & X & X & X & X \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 52 & 51 & 50 & 49 & 48 \end{array}$$

kandidaten:




Deze manier van tellen geeft het aantal mogelijkheden in VOLGORDE!
Daarom moeten we de volgorde nog wegdelen:
5 elementen kunnen op 5! manieren gerangschikt worden

$$\frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 52 \cdot 51 \cdot 5 \cdot 4 = 53040$$

$$Wiskundige\ notatie : C_{52}^{5}$$

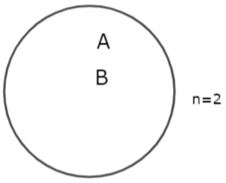
## Herhalingscombinaties

**Op hoeveel manieren kan je 3 identieke snoepjes onder 2 kinderen verdelen**

plaatsen: de drie snoepjes: XXX

mogelijke oplossingen: {A,A,B}
{B,A,B}
{B,B,B}
{A,A,A}

Volgorde: niet van toepassing
Herhaling: is mogelijk

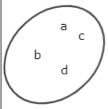



Begin met aantal kandidaten, verhoog tot aantal plaatsen is bereikt

totaal aantal mogelijkheden: $\boxed{\bar{C}_2^3 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3!} = 4}$

volgorde wegdelen

$Voorbeeld : \bar{C}_4^3$ XXX




{a,a,a} {b,b,a} {c,c,a} {d,d,a} {a,b,c}
{a,a,b} {b,b,b} {c,c,b} {d,d,b} {a,b,d}
{a,a,c} {b,b,c} {c,c,c} {d,d,c} {a,c,d}
{a,a,d} {b,b,d} {c,c,d} {d,d,d} {b,c,d}

er zijn $\bar{C}_4^3$ groepen, ieder 3 letters, samen $3 \cdot \bar{C}_4^3$ letters

alle letters komen even veel voor, dus komt a $\frac{3 \cdot \bar{C}_4^3}{4}$ voor

alle groepen die a bevatten, deze letter één keer schrappen

{a,a} {b,b} {c,c} {d,d} {b,c}
{a,b} {b,d}
{a,c} {c,d}
{a,d}

er zijn nu $\bar{C}_4^2$ groepen,in totaal $2 \cdot \bar{C}_4^2$ letters

de letter a komt $\frac{2 \cdot \bar{C}_4^2}{4}$ keer voor

dit geeft dan: $\frac{3 \cdot \bar{C}_4^3}{4} = \frac{2 \cdot \bar{C}_4^2}{4} + \bar{C}_4^2 = \frac{6}{4} \cdot \bar{C}_4^2 \Rightarrow \bar{C}_4^3 = \frac{6}{3} \bar{C}_4^2$

$\bar{C}_4^2 = \frac{5}{2} \bar{C}_4^1 \qquad \bar{C}_4^1 = 4$

$$\boxed{\Rightarrow \bar{C}_4^3 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 20}$$

21 / 21 2 s

**Herhalingscombinaties**

er zijn $\bar{C}_n^p$ groepen, ieder p letters, samen $p \cdot \bar{C}_n^p$ letters

alle letters komen even veel voor, dus komt a $\frac{p \cdot \bar{C}_n^p}{n}$ voor

er zijn nu $\bar{C}_n^{p-1}$ groepen,in totaal $(p-1) \cdot \bar{C}_n^{p-1}$ letters

de letter a komt $\frac{(p-1) \cdot \bar{C}_n^{p-1}}{n}$ keer voor

dit geeft dan: $\frac{p \cdot \bar{C}_n^p}{n} = \frac{(p-1) \cdot \bar{C}_n^{p-1}}{n} + \bar{C}_n^{p-1} = \frac{n+p-1}{n} \cdot \bar{C}_n^{p-1}$

$$\bar{C}_n^p = \frac{n+p-1}{p} \cdot \bar{C}_n^{p-1}$$

$$\bar{C}_n^p = \frac{n \cdot (n+1) \cdots (n+p-2) \cdot (n+p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p}$$

Figure 4: https://www.geogebra.org/m/m2h6yh47

### 2.3 Venndiagrammen

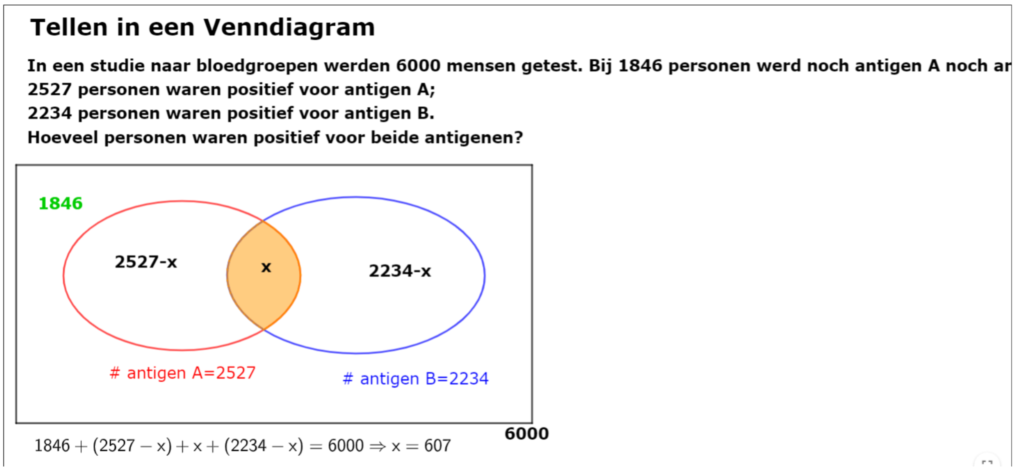



Figure 5: https://www.geogebra.org/m/m2h6yh47

# 3 Oefeningen Telproblemen

### 3.1 Reeks 1

1. Hoeveel woorden van 5 letters bestaan er?
2. De acht leerlingen van een klas kunnen kiezen uit acht verschillende sporttakken. Op hoeveel manieren kan dit als elke leerling een andere sporttak moet kiezen?
3. Met de cijfers 1 tot en met 7 vormen we getallen van vijf verschillende cijfers.
   (a) Hoeveel dergelijke getallen bestaan er?
   (b) Hoeveel van deze getallen beginnen met het cijfer 3?
   (c) Hoeveel van deze getallen eindigen op het cijfer 6?
   (d) In hoeveel van deze getallen staan de cijfers 1, 2 en 3 in deze volgorde naast elkaar?
   (e) Hoeveel van deze getallen bevatten het cijfer 5?
4. Bij de Belgische lotto moeten zes verschillende getallen uit vijfenveertig worden aangekruist. Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er?
5. Een autofabrikant biedt zeven verschillende modellen aan. Voor elk model kan men kiezen uit vijf kleuren en drie soorten binnenbekleding. Uit hoeveel verschillende wagens kan men kiezen.
6. Tien vrienden spelen een tennistornooi. Hoeveel verschillende wedstrijden enkelspel kunnen er worden gespeeld?
7. Je wilt op je boekenrek zes romans, vijf detectiveverhalen en twee gedichtenbundels rangschikken. Je wilt graag de gedichtenbundels helemaal rechts op de boekenplank. De overige boeken mogen willekeurig worden geplaatst. Hoeveel rangschikkingen zijn er mogelijk?
8. Een test bestaat uit acht vragen. Bij elke vraag zijn er drie mogelijke antwoorden. Op hoeveel manieren kan men deze vragenlijst invullen als voor elke vraag juist één antwoord moet gegeven worden?
9. Een kaartclub telt negen mannelijke en zeven vrouwelijke leden. Men wil een bestuur van drie leden kiezen. Op hoeveel manieren kan het bestuur worden samengesteld als;
   (a) De bestuursleden mannen moeten zijn.
   (b) Enkel vrouwen in het bestuur mogen zetelen?

(c) Het bestuur moet bestaan uit twee mannen en één vrouw

(d) Er hoogstens twee mannen in het bestuur mogen?

(e) Het bestuur gemengd moet zijn

10. In een onderzoek bij 115 bezoekers aan een ijsjeszaak blijkt dat

    - 20 personen aardbei en chocolade en vanilleijs lekker vinden
    - 24 personen geen enkel van voornoemde smaken lekker vinden
    - 15 personen alleen chocolade lekker vinden
    - 41 personen niet van choloade-ijs houden (maar wel van minstens één andere smaak)
    - 27 personen exact 2 smaken lekker vinden
    - 11 personen alleen aardbei lekker vinden
    - 59 personen vanilleijs lusten

    Hoeveel personen vinden dan aardbei-ijs en chocolade-ijs dan lekker?

### 3.1.1 Reeks 2

1. Na een verkeersongeval met vluchtmisdrijf, ondervraagt de rijkswacht de enige getuige. Het enige wat deze persoon zich nog herinnert is dat de vluchtende auto een oud nummerplaat had (d.w.z. drie letters gevolgd door drie cijfers; de letters O en I worden niet gebruikt.) en dat op de nummerplaat twee gelijke letters maar geen twee gelijke cijfers stonden. Hoeveel mogelijkheden moet de rijkswacht nog controleren op grond van deze getuigenis?

2. Voor een cursus van het Rode Kruis worden tijdens het weekend acht lesuren voorzien: drie uur EHBO, één uur anatomie, twee uren gewondentransport en twee uur verbandenleer. Op hoeveel manieren kan men het lessenrooster opstellen?

3. Een gemeenteschool wil zijn zes klaslokalen herschilderen. Men beschikt over zes grote potten verf. Voor elke klas er er één pot verf nodig. Op hoeveel manieren kan men deze zes lokalen schilderen als er drie potten gele, twee potten blauwe en één pot groene verf ter beschikking zijn?

4. In een wachtzaal van een huisarts zitten 7 personen, 4 vrouwen en 3 mannen. Zij weten niet wie aan de beurt is. Op hoeveel verschillende manieren kunnen zij bij de dokter binnengaan als je weet dat er geen twee personen van hetzelfde geslacht na elkaar mogen binnengaan?

5. Als kerstgeschenk wil een moeder aan elk van haar vier kinderen twee stripverhalen geven uit dezelfde reeks.

   (a) Op hoeveel manieren kan ze deze acht (verschillende) boekjes aankopen als de reeks uit twintig stripverhalen bestaat?

   (b) Hoeveel mogelijkheden zijn er om deze acht boekjes te verdelen als elk kind er twee krijgt?

   (c) Indien de boekjes twee per twee verpakt zijn, op hoeveel manieren kunnen ze dan uitgedeeld worden?

6. Een volksdansgroep bestaat uit 24 personen waarvan een derde jongens zijn.

   (a) Op hoeveel manieren kan een bestuur van zes personen worden gevormd?

   (b) Hoeveel mogelijkheden zijn er nog indien ervoor gezorgd wordt dat de samenstelling van het bestuur evenredig is met de groep?

   (c) Onder de zes leden van het bestuur moeten een voorzitter, een ondervoorzitter en een secretaris gekozen worden. Op hoeveel manieren kan dit?

   (d) Er zijn 10 opdrachten te verdelen onder de bestuursleden. Hoeveel mogelijkheden zijn er in principe?

   (e) Bij een optreden wordt een dans voor zes paren (j-m) uitgevoerd. Op hoeveel manieren kunnen deze zes paren samengesteld worden uit de leden van de groep.

7. De Belgische beroepsmilitairen kregen vroeger, bij aankoop van een auto, een nummerplaat toegewezen bestaande uit 5 symbolen (letters en cijfers), waarvan 1 of 2 letters, verschillend van O en I en de rest zijn cijfers. Op de eerste plaats stond altijd de letter B. Aantal mogelijke nummerplaten?

8. Een klas bestaat uit 24 studenten

   (a) Op hoeveel manieren kan een klasverantwoordelijke en een sportverantwoordelijke gekozen worden? ( Het moeten twee verschillende studenten zijn)

   (b) De klas moet een volleybal-match spelen tegen de ploeg van de leerkrachten. Hoever verschillende ploegen van zes personen kunnen er samengesteld worden met de studenten uit deze klas?

   (c) Voor een examen moet deze klas verdeeld worden in drie groepen van acht studenten. Per groep wordt er een andere reeks vragen voorzien. Op hoeveel manieren kan deze indeling in groep 1, 2 en 3 geregeld worden?

9. Bij een familiefeest op nieuwjaarsdag zijn er vijf koppels aanwezig.

   (a) Op hoeveel manieren kunnen deze 10 personen rond de tafel met 10 stoelen plaatsnemen?

   (b) Hoeveel mogelijkheden zijn er nog indien elke vrouw naast haar man wil zitten?

   (c) Na het eten wil Chantal monopoly spelen. Op hoeveel manieren kan ze drie medespelers kiezen?

   (d) De overige zes personen kiezen per twee één van de volgende spelen: damspel, schaakspel, mastermind. Op hoeveel manieren kan de verdeling gebeuren?

10. Voor een beveiligingscode gebruikt een firma vierkante roosters verdeeld in 25 gelijke vierkantjes. Elk vierkantje kan een blanco zijn of een '1' bevatten. Hieronder zie je een voorbeeld van een ingevuld rooster met één beveiligingscode

<table>
<tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr>
<tr><td> </td><td>1</td><td> </td><td> </td><td> </td></tr>
<tr><td> </td><td> </td><td> </td><td>1</td><td> </td></tr>
<tr><td> </td><td>1</td><td>1</td><td> </td><td> </td></tr>
<tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr>
</table>

   (a) Hoeveel mogelijk codes zijn er?

   (b) Hoeveel codes bevatten elfmaal een '1'?

11. Een biljartclub richt een competitie in waarbij elk lid tegen elk ander lid een match moet spelen. Op die manier worden er 105 matchen gespeeld. Hoeveel leden doen er mee aan de competitie?

12. Hoeveel verschillende bedragen (verschillend van 0 €) kan je betalen met een stuk van 1 €, twee briefjes van 5 € en vier briefjes van 20 €?

13. Bij het pokerspel krijgt iedere speler bij de aanvang precies vijf kaarten

   (a) Hoeveel mogelijke vijftallen kaarten kan een speler toebedeeld krijgen?

   (b) Op hoeveel manieren kan een speler elk van de volgende combinaties toebedeeld krijgen bij het begin van het spel.

      - "four of a kind" vb: 4 azen en één dire
      - "full house" vb: 3 achten en 2 zessen
      - "three of a kind" vb: 3 azen en 1 tien en 1 vijf
      - "two pair" vb: 2 zessen en 2 achten en 1 negen

- "one pair" vb: 2 negens en 1 aas en 1 vijf en 1 twee

14. Hoeveel verschillende dominostenen zijn er?
15. Een jeugdgroep met 20 leden overnacht in een hotel. Er zijn drie slaapkamers beschikbaar met respectievelijk 5, 7 en 8 plaatsen.
    (a) Op hoeveel manieren kan de groep verdeeld worden over de drie kamers?
    (b) Op hoeveel manieren kan dit nog als de groepsleider zeker niet in de grootste kamer wil slapen?
16. Op hoeveel manieren kunnen 10 mannen en 7 vrouwen op een rij gaan zitten als geen twee vrouwen naast elkaar mogen zitten?
17. Een bibliotheek heeft zeven verschillende detectiveromans van een bepaald auteur. Drie personen wensen respectievelijk 3,2 en 2 van deze boeken mee te nemen. Hoeveel mogelijkheden zijn er?
18. Twaalf scouts nemen deel aan een kamp.
    (a) Tijdens de sportdag worden ze in twee groepen van zes verdeeld voor een volleybalmatch. Op hoeveel manieren kan dit?
    (b) Voor een dropping worden ze verdeeld in vier groepen van drie. Hoeveel mogelijkheden zijn er?
19. Hoeveel getallen van 7 cijfers kan je vormen waarin driemaal het cijfer 8, tweemaal het cijfer 5 en tweemaal het cijfer 0 voorkomt? (Denk eraan het meest linkse cijfer is nooit 0)
20. Op hoeveel manieren kunnen we 11 pintjes, 1 kriek en 1 duvel verdelen onder 5 dorstige studenten als iedereen minstens 1 drankje moet krijgen en de duvel en de kriek niet naar dezelfde persoon mogen gaan?
21. Met de letters van het woord "MONDAY" maak je alle mogelijke woorden, die je vervolgens alfabetisch rangschikt. Op de hoeveelste plaats in de rij staat dan het woord "MONDAY"?

# 4 Duivenhokprincipe

## 4.1 Principe

Wanneer n+1 duiven in n hokken neerstrijken, dan is er altijd minstens 1 hok met minstens twee duiven ($n \in \mathbb{N}_0$).

## 4.2 Voorbeeld

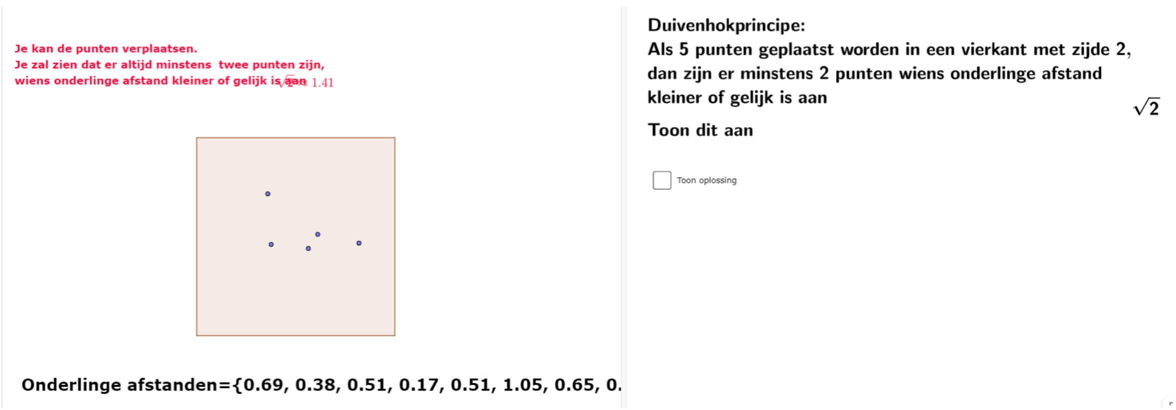



Figure 6: https://www.geogebra.org/m/sy2vvnnz

### 4.3 oefeningen

1. In elke groep van 367 personen zijn er tenminste twee met dezelfde verjaardag
2. Er zijn in België zeker 50 volwassenen die niet kaal zijn, met hetzelfde aantal haren op hun hoofd.
3. In elke groep zijn er minstens 2 personen die eenzelfde aantal personen in die groep kennen.
4. Een zak bevat 6 rode, 5 witte en 7 blauwe knikkers. Wat is het kleinste aantal knikkers dat je uit de zak moet nemen om zeker te zijn dat je minstens 3 rode of minstens 4 witte of minstens 5 blauwe knikkers bij zijn.
5. 15 personen zetten zich neer aan een ronde tafel. Voor elke zitplaats ligt er een naamkaartje op tafel. Eens gezeten blijkt dat niemand voor zijn eigen naamkaartje zit. Dan kan de tafel altijd zo gedraaid worden dat minstens 2 personen wel voor hun naamkaartje zitten.

## 5 Driehoek van Pascal

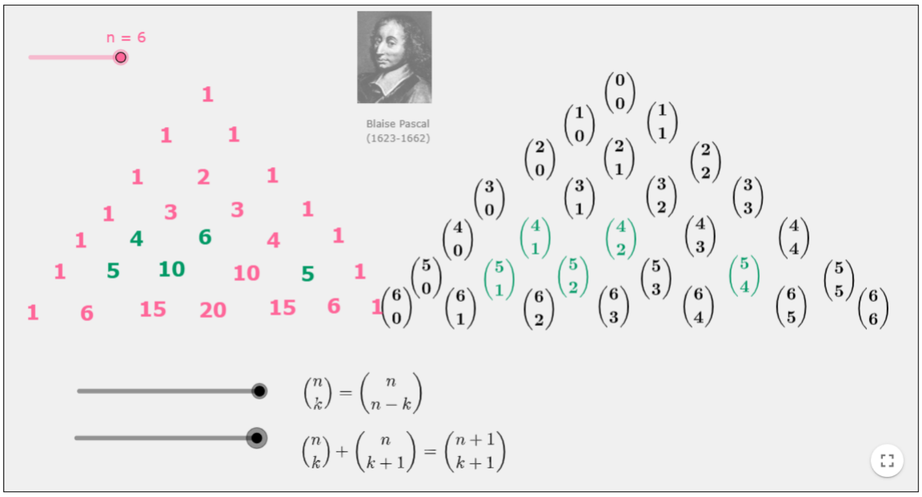



Figure 7: https://www.geogebra.org/m/yFSQjHVZ

### 5.1 Oefeningen

1. Op hoeveel verschillende manieren kan je hieronder "wiskunde is tof" lezen?

W
I I
S S S
K K K K
U U U U U
N N N N N N
D D D D D D D
E E E E E E
I I I I I
S S S S
T T T
O O
F

2. Bord van Galton

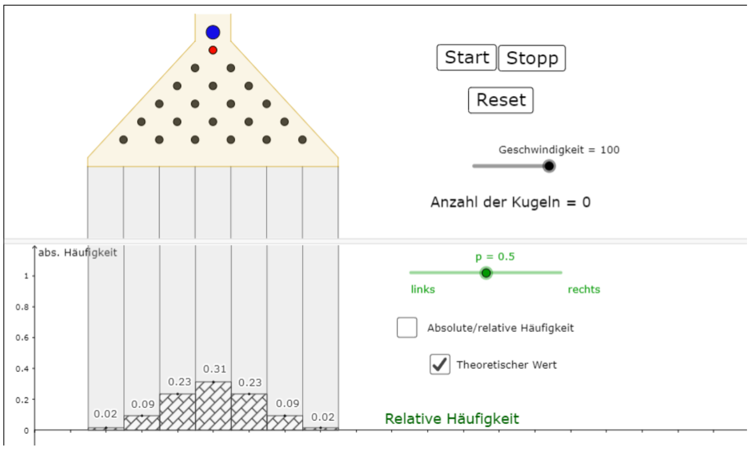



Figure 8: https://www.geogebra.org/m/xqtyrc5s

# 6 binonium van newton

$TB : (a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$ **De formule is juist voor n=1 want**

$$(a+b)^1 = a + b = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1$$

**inductiestap: formule ok voor n** $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$

**TB formule ok voor n+1** $\boxed{(a+b)^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^{n+1-i} b^i}$

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n \cdot (a+b) \\
&= \left[\binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n} b^n\right] \cdot (a+b) \\
&= \binom{n}{0} a^{n+1} + \binom{n}{1} a^n b^1 + \binom{n}{2} a^{n-1} b^2 + \ldots + \binom{n}{n} a^1 b^n \\
&\qquad + \binom{n}{0} a^n b^1 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a^1 b^n + \binom{n}{n} b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n b^1 + \binom{n+1}{2} a^{n-1} b^2 + \ldots + \binom{n+1}{n} a^1 b^n + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^{n+1-i} b^i
\end{aligned}$$

Figure 9: https://www.geogebra.org/m/bZKdvwEa

## 6.1 Oefeningen

1. Bewijs: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2. Bewijs: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$
3. Ontwikkel $\left(1 + \frac{2}{x}\right)^3$
4. Bepaal de vierde term in de ontwikkeling van $(2x - 3)^5$
5. Bepaal de coëfficiënt van $x^6$ in de ontwikkeling van $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^{14}$
6. Bepaal de coëfficiënt zonder $x$ in de ontwikkeling van $\left(x^3 + \frac{2}{x}\right)^{20}$
7. Bepaal de coëfficiënt van $x^5$ in de ontwikkeling van $(1 + 4x)^9$

8. Als de coëfficiënt van $\frac{1}{x}$ $-70000$ is in de ontwikkeling van $\left(2x^2 - \frac{d}{x^3}\right)^7$, bepaal dan de waarde van d

9. Bewijs: $2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$

10. Bewijs: $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0$

11. Bewijs:

    (a) $\frac{n!}{(n+1)!} - \frac{(n+1)!}{(n+2)!} - \frac{(n+2)!}{(n+3)!} - \frac{n!}{(n+3)!} = -\frac{n}{(n+1)(n+3)}$

    (b) $\frac{n^2-9}{(n+3)!} + \frac{6}{(n+2)!} - \frac{1!}{(n+1)!} = \frac{1}{1!(n+2)!}$

12. In 1494 formuleert Fra Luca Pacioli (de wiskundeleraar van Leonardo da Vinci) volgend probleem: Twee teams spelen een balspel. Beide teams zijn aan elkaar gewaagd. Dat wil zeggen dat ze elke keer 50% kans hebben om een game te winnen. Het team dat als eerste 6 keer wint ontvangt het prijzengeld, 10 gouden dukaten. Om een of andere reden moet het spel echter worden gestaakt bij de stand 5-3. Het spel kan niet worden hervat. Op welk deel van het prijzengeld heeft elk van de teams recht.
    Blaise Pascal geeft hiervoor in 1654 een brief aan Pierre de Fermat een oplossing met behulp van de driehoek van Pascal,nl. ...

# 7 bewijzen met verhaaltje

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

2. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

3. $k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$

4. $\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}\binom{m}{k-j} = \binom{n+m}{k}$

5. $2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$

6. $\sum_{k\geq 0} \binom{n}{2k} = 2^{n-1}$

7. Los onderstaand probleem van Ibn Mun'im op. Deze Marokkaanse wiskundige onderzocht omstreeks 1200 op hoeveel manieren men een kwastje (zoals aan een afstudeerhoedje in Amerika) uit verschillende kleuren kon samenstellen:

[illegible]

التاسع من الثامن وكذا إخراج الجدول العاشر من التاسع وانتهاء الجدول بعاشر في
مثالنا هذا بيت فيه شرابه واحدة من عشرة ألوان ... ثم إن
خواص هذا الجدول وما يتركب فيه من الأشكال ... فيه من الاتفاقات
الغريبة والخواص العجيبة ما يدعو إلى ذكر الألوان الأخطا ...
اتكالا على تأمل الناظر ورغبة في إيضاح ترك الأخطار وقصد الاختبار والعدول

| جدول جمع الجداول | | | | | | | | | | | وهكذا تخطيط المثال في الجدول |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | | | | | | من عشرة الألوان |
| 10 | 9 | 1 | | | | | | | | | جدول التراكيب التي من تسعة ألوان تسعة ألوان |
| 45 | 36 | 8 | 1 | | | | | | | | جدول التراكيب التي من ثمانية ألوان ثمانية ألوان |
| 120 | 84 | 28 | 7 | 1 | | | | | | | جدول التراكيب التي من سبعة ألوان سبعة ألوان |
| 210 | 126 | 56 | 21 | 6 | 1 | | | | | | جدول التراكيب التي من ستة ألوان ستة ألوان |
| 252 | 126 | 70 | 35 | 15 | 5 | 1 | | | | | من خمسة ألوان خمسة ألوان |
| 210 | 84 | 56 | 35 | 20 | 10 | 4 | 1 | | | | من أربعة ألوان أربعة ألوان |
| 120 | 36 | 28 | 21 | 15 | 10 | 6 | 3 | 1 | | | من ثلاثة ألوان ثلاثة ألوان |
| 45 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | من لونين لونين |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | من لون لون |
| جملة الألوان | اللون العاشر | اللون التاسع | اللون الثامن | اللون السابع | اللون السادس | اللون الخامس | اللون الرابع | اللون الثالث | اللون الثاني | اللون الأول | |

**صنعة العمل بالجدول** فإذا كان عدد الألوان معلوما وأردت كم شرابة تكون فيها على
أن يكون فيه كل شرابة ألوان معلومة فاستخرج من الجدول ... عدد ...
الألوان ... ونزل إلى الجدول عدد الألوان كل شرابة وعدد ... فيجمع فيه
الجدول

## 8 oplossingen Telproblemen reeks 2

1. $3 \cdot 24 \cdot 1 \cdot 23 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$
2. $\bar{P}_8^{3,2,2} = 1680$
3. $\bar{P}_6^{3,2} = 60$
4. $P_4 \cdot P_3$
5. $C_{20}^8 = 125970$; $C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 = \bar{P}_8^{2,2,2,2} = 2520$; $\quad P_4 = 4! = 24$
6. $C_{24}^6 = 134596$; $C_8^2 \cdot C_{16}^4 = 50960$; $V_6^3 = 120$; $\bar{C}_6^{10} =$; $C_8^6 \cdot C_{16}^6 \cdot P_6 = 161441280$
7. $\bar{V}_{10}^4 + 24 \cdot \bar{V}_{10}^3 \cdot 4 = 106000$
8. $V_{24}^2 = 552$; $C_{24}^6 = 134596$; $C_{24}^8 \cdot C_{16}^8 \cdot C_8^8 = 9465511770$
9. $P_{10} = 10!$; $10 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 7680$; $C_9^3 = 84$; $\bar{P}_6^{2,2,2} = 90$
10. $\bar{V}_2^{25} = 2^{25}$ ; $\bar{P}_{25}^{11,14}$
11. $C_n^2 = 105 \Rightarrow n = 15$
12. $2 \cdot 3 \cdot 5 - 1 = 29$
13. $C_{52}^5 = 2598960$; $C_{13}^1 \cdot C_{48}^1 = 624$ ; $C_{13}^1 \cdot C_4^3 \cdot C_{12}^1 \cdot C_4^2 = 3744$; $C_{13}^1 \cdot C_4^3 \cdot C_{12}^2 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1 = 54912$; $C_{13}^2 \cdot C_4^2 \cdot C_4^2 \cdot C_{11}^1 \cdot C_4^1 = 123552$; $C_{13}^1 \cdot C_4^2 \cdot C_{12}^3 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1 = 123552$
14. $\bar{C}_7^2$
15. $\bar{P}_{20}^{5,7,8} = 99768240$; $\bar{P}_{20}^{5,7,8} - \bar{P}_{19}^{5,7,7} = 39907296$
16. $P_{10} \cdot C_{11}^7 \cdot P_7$
17. $\bar{P}_7^{3,2,2} = 210$
18. $\frac{C_{12}^6}{2!} = 462$; $\frac{\bar{P}_{12}^{3,3,3,3}}{4!} = 15400$
19. $\bar{P}_7^{3,2,2} - \bar{P}^{3,2} = 150$
20. $5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \bar{C}_5^8$
21. $\begin{matrix} 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ M & O & N & D & A & Y \\ 5! & 4! & 3! & 2! & 1! & 0! \end{matrix}$. Dit geeft dan $2.5! + 3.4! + 2.3! + 1.2! + 0.1! + 0.0! = 327$

## 9 oplossingen binomium van Newton

1. LL$=\frac{n!}{(n-k)!k!}$; RL$=\frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!}$
2. $\frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} = \frac{(k+1)n!}{(n-k)!(k+1)k!} + \frac{(n-k)n!}{(n-k)(n-k-1)!(k+1)!} = \frac{n!(k+1+n-k)}{(n-k)!(k+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!}$
3. $1 + \frac{6}{x} + \frac{12}{x^2} + \frac{8}{x^3}$
4. 
5. 
6. $\left(x^3 + \frac{2}{x}\right)^{20} = \sum\limits_{i=0}^{20} \binom{20}{i} \left(x^3\right)^{20-i} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^i = \sum\limits_{i=0}^{20} \binom{20}{i} 2^i \left(x\right)^{60-4i} \Rightarrow 60 - 4i = 0 \Rightarrow i = 15 \Rightarrow$ coëfficiënt: $\binom{20}{15} \cdot 2^{15}$
7. 
8. 

9. $(1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^{n-i} 1^i \Rightarrow 2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$

10.

11.