Modello Geogebra per l'interferenza/diffrazione con creazione dello spettro colore

Si useranno le relazioni per l'interferenza/diffrazione note dalla letteratura, che qui si richiamano:

$$I_{int}(\theta) = I_0 N^2 \frac{\sin^2 \frac{N\phi}{2}}{\sin^2 \frac{\phi}{2}} = I_0 N^2 \frac{\sin^2 \frac{Nkd \sin\theta}{2}}{\sin^2 \frac{kd \sin\theta}{2}} = I_0 N^2 \frac{\sin^2 \frac{N\pi d \sin\theta}{\lambda}}{\sin^2 \frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}} \qquad (1)$$

N, numero di fenditure; d, distanza tra le fenditure; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, vettore d'onda; λ, lunghezza d'onda. Se indichiamo con L la distanza delle fenditure dallo schermo dove si forma l'interferenza, e con x lo spostamento dal centro dello schermo, possiamo esprimere I in funzione di x:

$$I_{int}(x) = I_0 N^2 \frac{\sin^2\left(\frac{N\pi d}{\lambda}\frac{x}{\sqrt{x^2+L^2}}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\frac{x}{\sqrt{x^2+L^2}}\right)} \qquad (2)$$

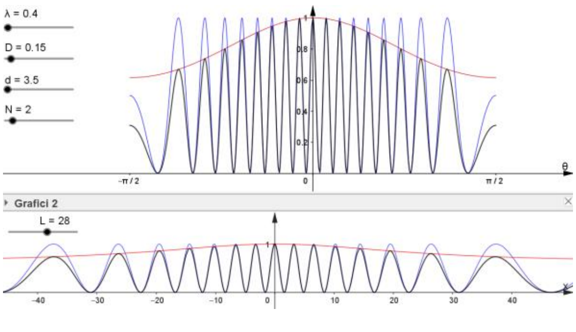
$$I_{dif}(\theta) = I_0 \frac{\sin^2 \frac{\pi D \sin\theta}{\lambda}}{\left(\frac{\pi D \sin\theta}{\lambda}\right)^2} \qquad I_{dif}(x) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi D}{\lambda}\frac{x}{\sqrt{x^2+L^2}}\right)}{\left(\frac{\pi D}{\lambda}\frac{x}{\sqrt{x^2+L^2}}\right)^2} \qquad (3)$$

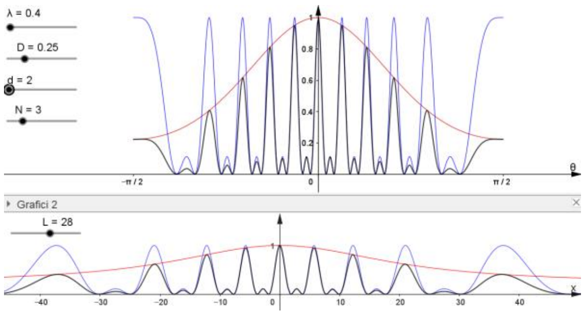
D, larghezza della fenditura. Per l'intensità totale, avremo:

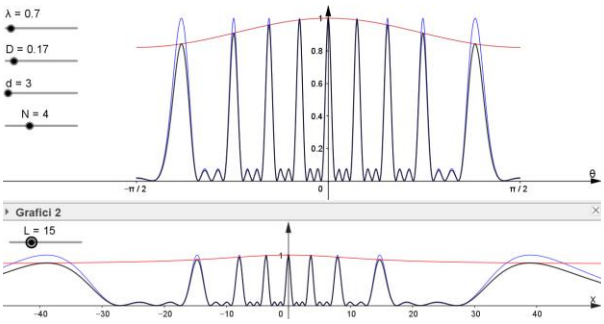
$$I = I_{int} \cdot I_{dif} \qquad (4)$$

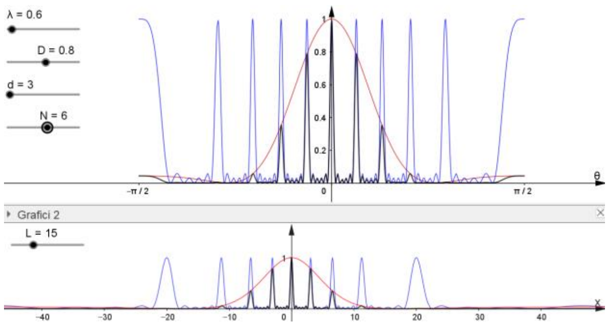
Queste relazioni sono valide quando la radiazione incidente è la stessa su tutte le fenditure, e forniscono i valori massimi dell'intensità. Non è infatti presente alcuna dipendenza dal tempo. In un qualunque punto x, avremo allora che:

$$0 \leq I(t) \leq I_{int} \cdot I_{dif}$$



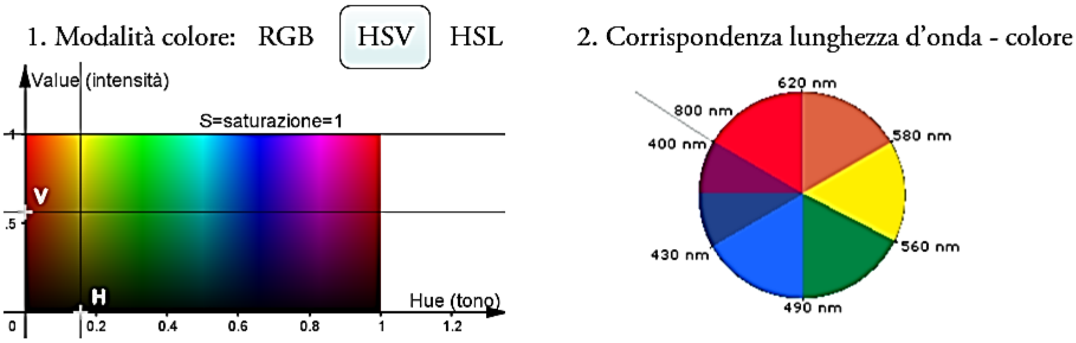




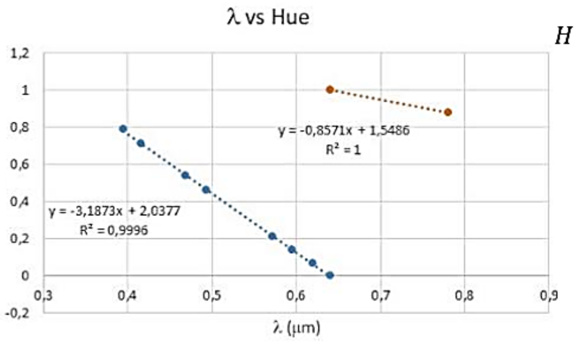


La simulazione consiste nel disegnare un segmento in corrispondenza ad una data posizione x sullo schermo, che abbia il colore associato alla lunghezza d'onda scelta e intensità data dalla (4). Ciò si può fare utilizzando la modalità colore HSV (scheda "avanzate" della finestra "proprietà"):

tono è la variabile che ci permette di scegliere il colore della radiazione. La corrispondenza tono-colore-lunghezza d'onda è stata stabilita associando ad ogni colore un valore di Hue (H, tono v. fig. parte 1), quindi mettendo in corrispondenza il colore con la lunghezza d'onda (parte 2):



La relazione $H - \lambda$ è praticamente lineare, ma sono necessarie due interpolazioni per il fatto che la relazione $Value - Hue$ presenta tonalità del rosso ai due estremi di $[0,1]$.



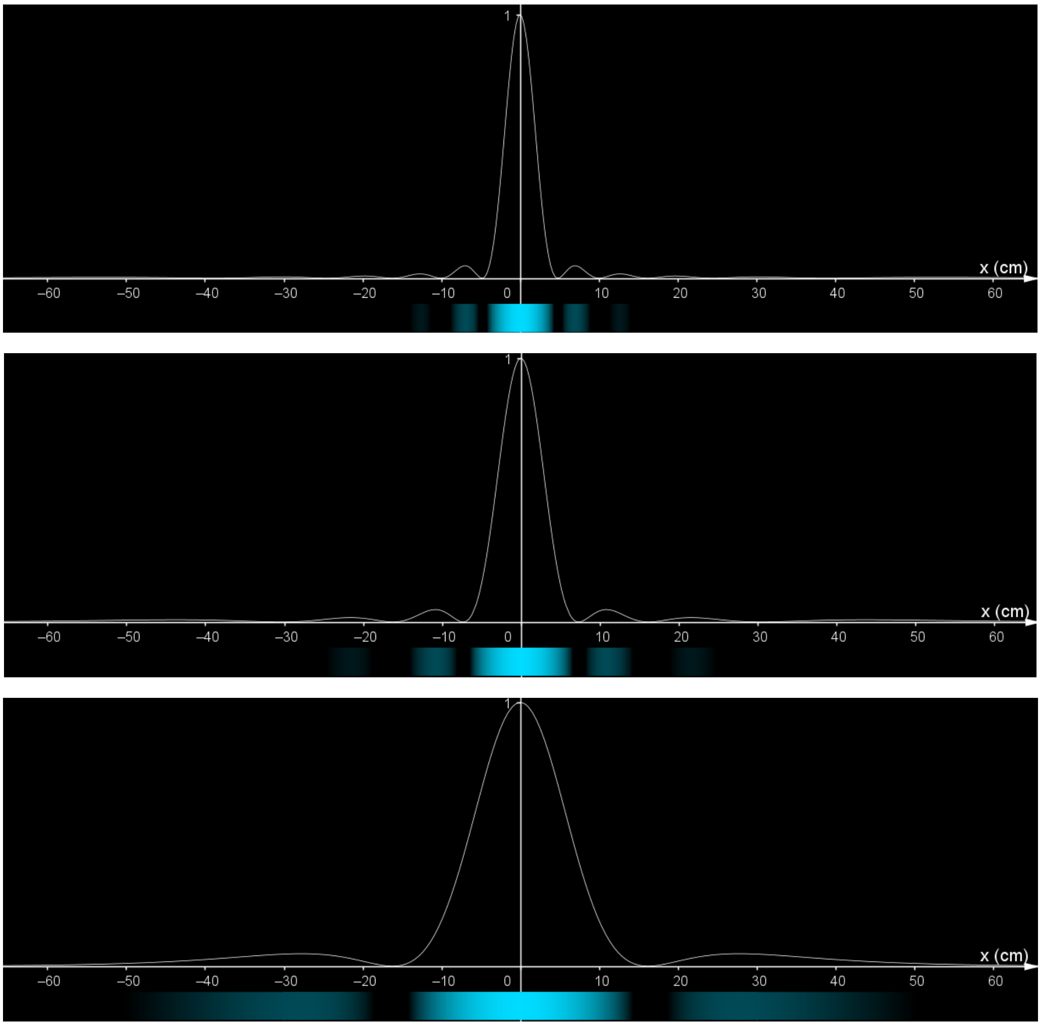
$$H = \begin{cases} 3.187\lambda + 2.038 & 0.38\,\mu m \leq \lambda \leq 0.64\,\mu m \\ -0.857\lambda + 1.549 & 0.64\,\mu m < \lambda \leq 0.72\,\mu m \end{cases}$$

$$S = 1$$

$$V = I(\theta) = \frac{\sin^2\left(N\dfrac{\pi d \sin\theta}{\lambda}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi d \sin\theta}{\lambda}\right)}$$

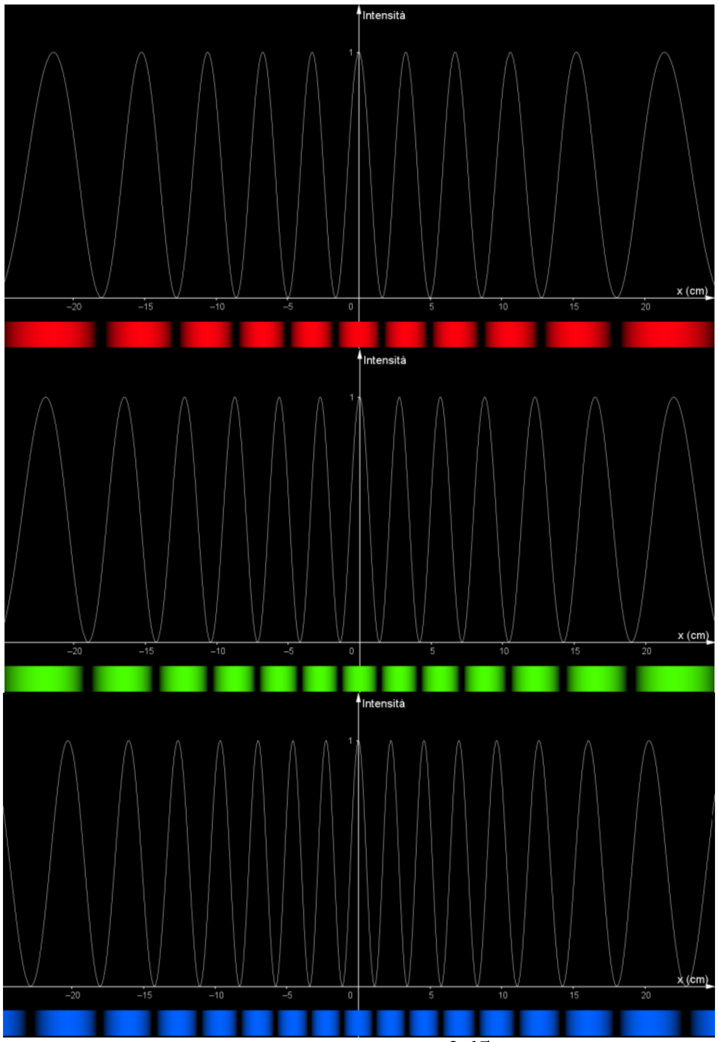
Alla variabile *luminosità* va assegnata l'intensità luminosa (4). Si procede suddividendo la porzione di schermo dove si vuole realizzare lo spettro colore in un certo numero di parti (nel simulatore, si è scelto di dividere in 1000 parti, quindi inserire 1001 segmenti). Qui di seguito, alcuni esempi:

Diffrazione



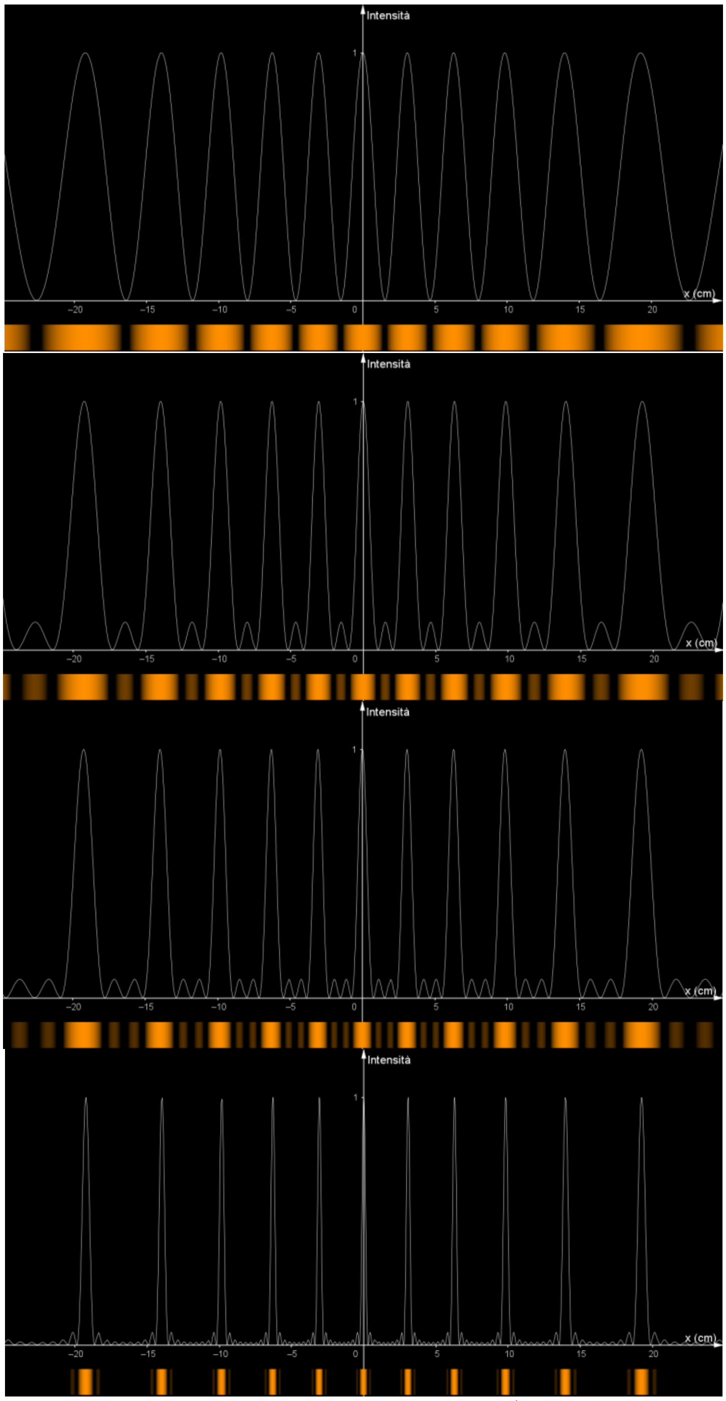
$$N = 1\,, \lambda = 0.475\ \mu m\,, D = \begin{cases} 3\ \mu m \\ 2\ \mu m \\ 1\ \mu m \end{cases}, L = 30\ cm$$

Interferenza: effetto della lunghezza d'onda



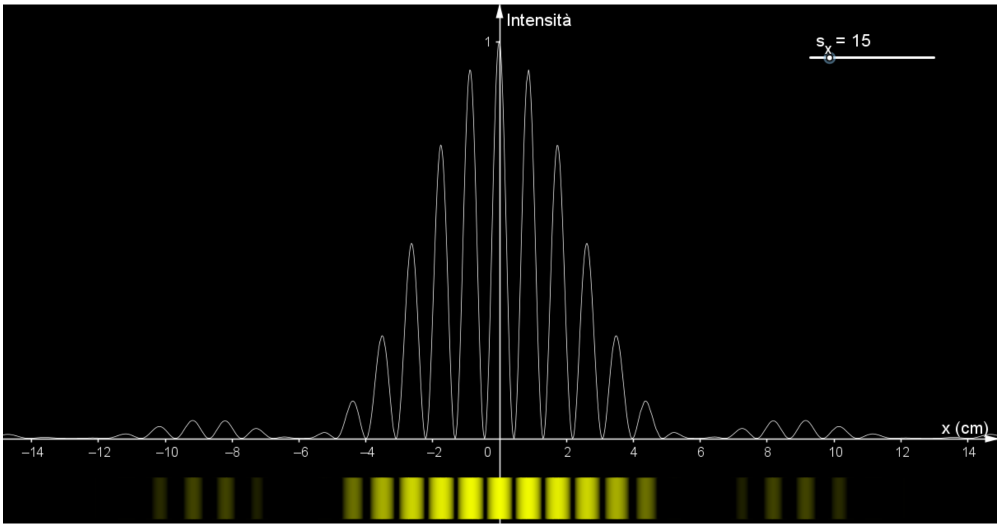
$$N = 2\ , d = 5\ \mu m, D = 0.01\ \mu m\ , \lambda = \begin{cases} 0.65\ \mu m \\ 0.55\ \mu m \\ 0.45\ \mu m \end{cases} , L = 25\ cm$$

Interferenza: effetto del numero di fenditure



$$\lambda = 0.61\ \mu m\,,\ d = 5\ \mu m,\ D = 0.01\ \mu m\,,\ N = \begin{cases} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 10 \end{cases},\ L = 25\ cm$$

Interferenza-diffrazione



$N = 2\,, \lambda = 0.585\ \mu m\,, d = 20\ \mu m\,, D = 3\ \mu m\,, L = 30\ cm$

Esercizi

1. In un esperimento di Young (2 fenditure), la lunghezza d'onda usata è: $\lambda = 0.64\ \mu m$. Le fenditure hanno una distanza $d = 10\ \mu m$ e una larghezza $D = 0.1\ \mu m$. Lo schermo dista $L = 30\ cm$. Determinare le distanze dei massimi $m = 1,2,3$ da quello centrale ($m = 0$). Cosa cambia se la larghezza delle fenditure diventa $D = 1\ \mu m$?

*****

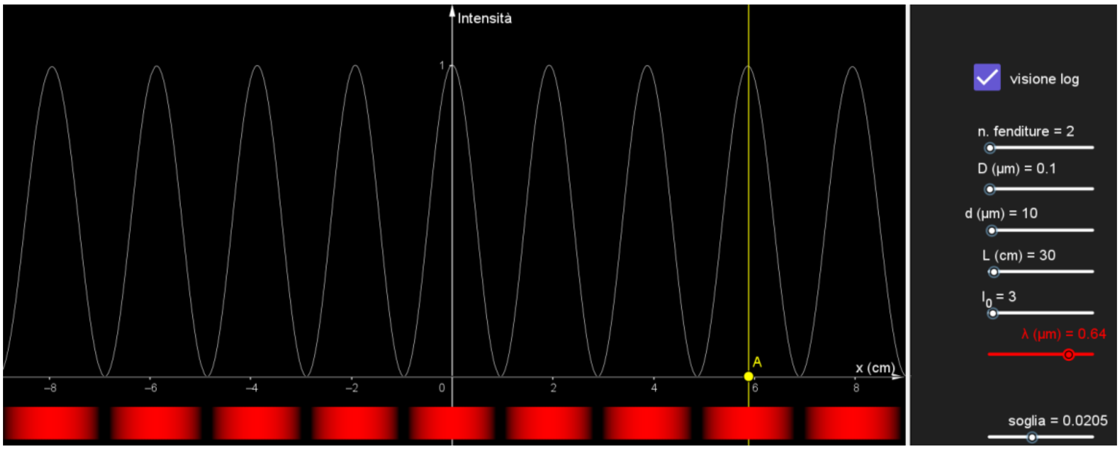
Essendo, per l'interferenza costruttiva, $d \sin\alpha = m\lambda \quad (m = 0,1,2,...)$, con i valori dati, si ottiene:

$$\alpha_1 = \sin^{-1}\left(\frac{\lambda}{d}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{0.64\ \mu m}{10\ \mu m}\right) = 0.063$$
$$\alpha_2 = \sin^{-1}\left(\frac{2\lambda}{d}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{2 \cdot 0.64\ \mu m}{10\ \mu m}\right) = 0.126$$
$$\alpha_3 = \sin^{-1}\left(\frac{3\lambda}{d}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{3 \cdot 0.64\ \mu m}{10\ \mu m}\right) = 0.19$$

Ed essendo inoltre $x = L\tan\alpha$, si ottiene:

$$x_1 = 30\ cm \cdot \tan\alpha_1 = 1.89\ cm$$
$$x_2 = 3.81\ cm$$
$$x_3 = 5.77\ cm$$

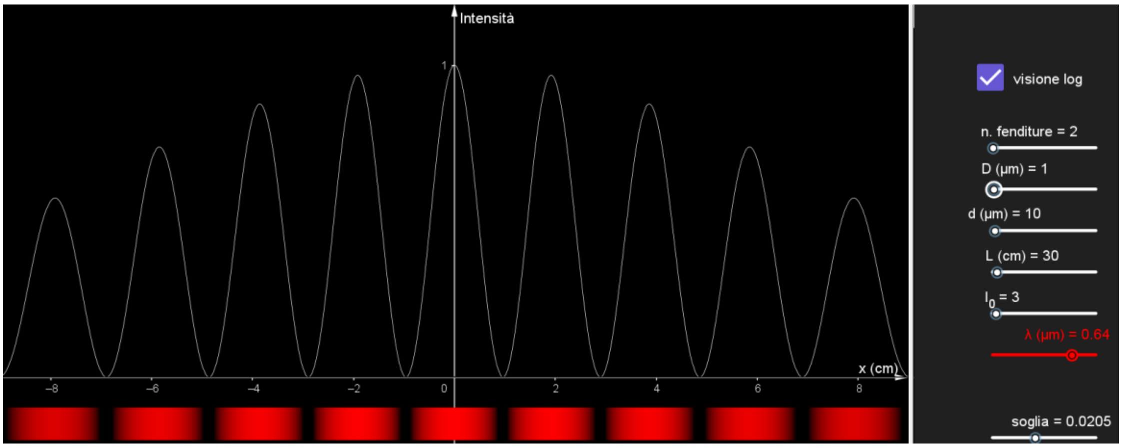
Impostando il nostro simulatore con i dati del problema, otteniamo:



Effettuando le misure, si trovano i valori:

$$x_1 = 1.91\ cm \qquad x_2 = 3.87\ cm \qquad x_3 = 5.88\ cm$$

Se la larghezza delle fenditure è $D = 1\ \mu m$, i valori x non cambiano. Si osserva invece come la diffrazione comincia a modulare la figura di interferenza:



2. In un esperimento di interferenza con 2 fenditure, viene usata luce di lunghezza d'onda $\lambda = 0.46\ \mu m$. La distanza tra le fenditure e la loro larghezza sono rispettivamente $d = 4\ \mu m$ e $D = 0.1\ \mu m$. Lo schermo si trova ad una distanza $L = 10\ cm$. Determina il numero di frange chiare presenti nella figura di interferenza.

*****

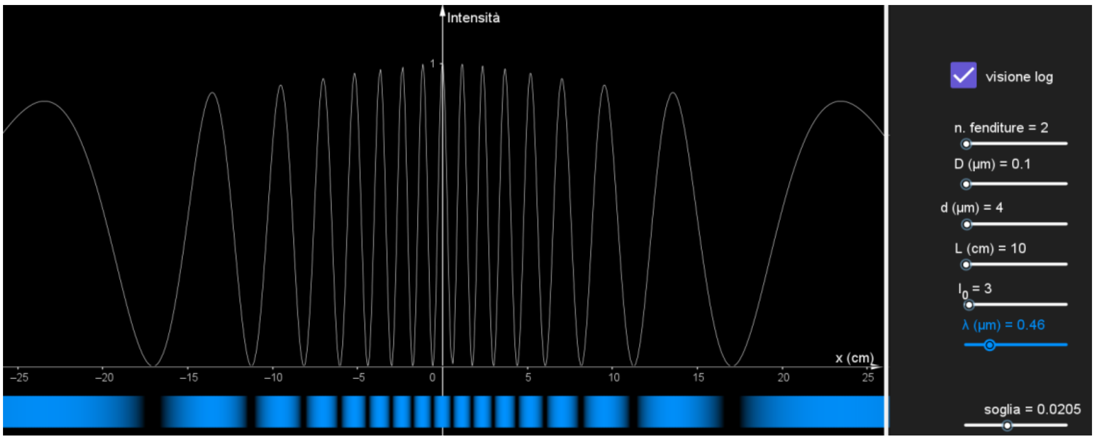
La condizione per le frange chiare è:

$$d \sin\alpha = m\lambda \rightarrow \sin\alpha = \frac{m\lambda}{d}$$

Dovendo inoltre essere $\alpha \leq 90°$, la condizione da rispettare è:

$$\sin\alpha \leq 1 \rightarrow \frac{m\lambda}{d} \leq 1 \rightarrow m \leq \frac{d}{\lambda} \approx 9$$

In questo numero è compreso il massimo centrale. Escludendo questo, abbiamo 8 frange per lato, quindi $8 + 8 + 1 = 17$ frange totali



3. Su una fenditura di larghezza $D = 5\ \mu m$ arriva luce monocromatica di lunghezza d'onda $\lambda = 0.69\ \mu m$. Lo schermo si trova ad una distanza $L = 40\ cm$. Determinare la larghezza della fascia chiara centrale.

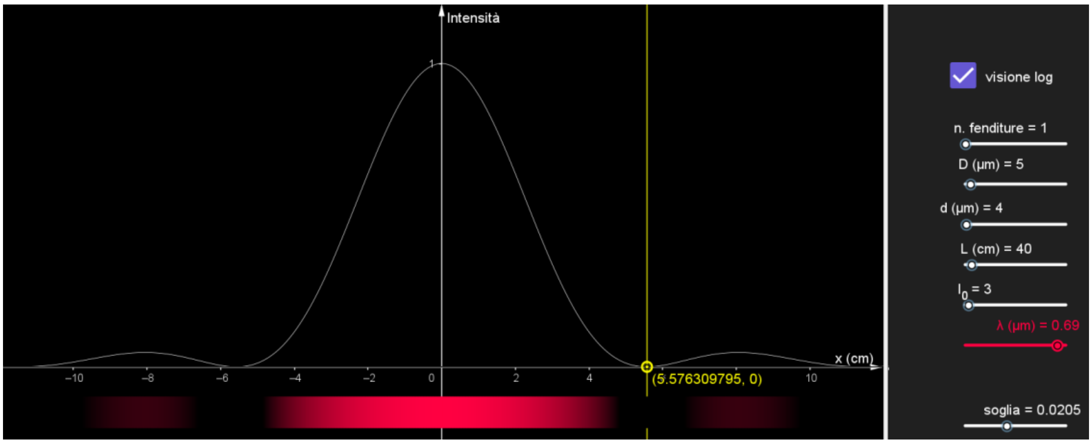
*****

La larghezza della fascia chiara centrale è determinata dalla posizione del primo minimo della figura di diffrazione. Cioè, dalla condizione:

$$D \sin\alpha = \lambda \rightarrow \alpha = \sin^{-1}\frac{\lambda}{D} = 0.138$$

Quindi, mezza frangia misura:

$$\frac{x}{2} = L \tan\alpha = 5.57\ cm \rightarrow x = 11{,}14\ cm$$



4. Luce monocromatica di lunghezza d'onda $\lambda = 0.5\ \mu m$ incide su una singola fenditura. Lo schermo si trova ad una distanza $L = 1.8\ m$. La larghezza della fascia chiara centrale è $x = 4.46\ cm$. Determinare la larghezza della fenditura.

*****

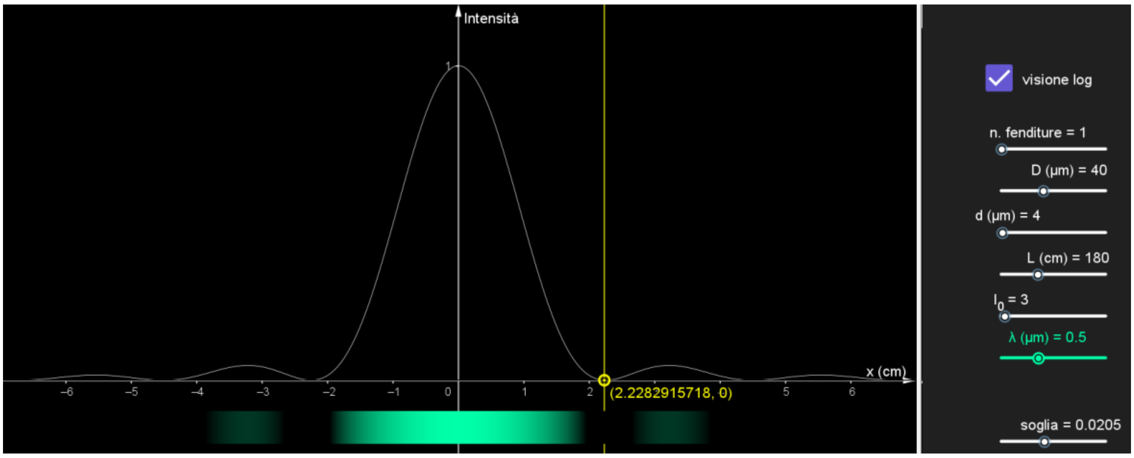
Da $\frac{x}{2} = L \tan\alpha$, si ricava α:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{x}{2L}\right) = 0.71$$

Da $D \sin\alpha = \lambda$, si ricava quindi D:

$$D = \frac{\lambda}{\sin\alpha} = 40\ \mu m$$

In Geogebra, si procede come segue: si impostano sulle slider lunghezza d'onda λ e distanza dello schermo L con i dati del problema. Quindi, variando la larghezza D della fenditura, si individua quel valore che fornisce una larghezza della fascia centrale pari a $x = 4.46\ cm$:


Intensità
1
x (cm)
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
5
6
(2.2282915718, 0)
visione log
n. fenditure = 1
D (μm) = 40
d (μm) = 4
L (cm) = 180
I0 = 3
λ (μm) = 0.5
soglia = 0.0205