Newton meets Pythagoras

MATHEMATIK

Hans-Jürgen Elschenbroich – Wilfried Dutkowski – Michael Rüsing

Ein Video zur physikalischen Veranschaulichung des Pythagoras-Satzes mit einem Kräftegleichgewicht bei drei an einem Punkt ansetzenden Kräften zeigt einen alternativen, physikalischen Zugang, bei dem aus pythagoräischen Tripeln ein rechter Winkel erzwungen wird. Hier gibt es gegenüber dem klassisch mathematischen Ansatz einen Perspektivwechsel. Bei der Analyse traten auch einige Fragen auf, die dann zu zwei GeoGebra Konstruktionen führten, die das physikalische Experiment simulieren und dynamisch visualisieren und damit auch im Klassenraum und im Mathematikunterricht zugänglich machen.

1 Beschreibung und Nachbau des Experimentes

In der Facebook Gruppe *GeoGebra Arts & STEAM* wurde ein Experiment vorgestellt, das physikalisch zum Satz des Pythagoras hinführt:

www.facebook.com/groups/GeoGebraSTEAM/posts/1229570407454887.

Leider wurde im Video das Experiment schräg seitlich aufgenommen, so dass durch die perspektivische Verzerrung im Screenshot weder die Dreieckslängen noch die Winkel in wahrer Größe nachgemessen werden können. In Abbildung 1 ist das nachgestellte Experiment in einer orthogonalen Aufnahme zu sehen, so dass durch Nachmessen das Dreieck als rechtwinklig erkannt werden kann und so der Bezug zum Satz des Pythagoras sichtbar wird. Wenn man wie hier mit kleineren Massen arbeitet, machen sich Effekte wie Reibung oder der Einfluss der Masse

MNU-Journal – Ausgabe 01.2023 – ISSN 0025-5866 – © Verlag Klaus Seeberger, Neuss

des Seils bemerkbar. Die in der Abbildung angezeigten Maße erhält man bei Runden auf ganze Zahlen.

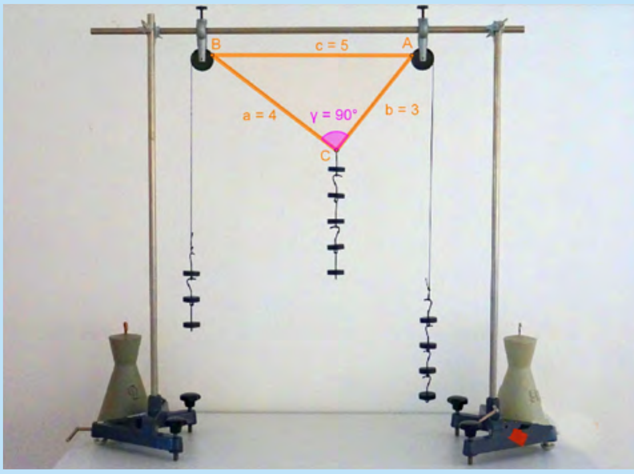

Abb. 1. Nachbau des Experimentes mit darübergelegtem Dreieck. W. DUTKOWSKI: Experiment & Foto H.-J. ELSCHENBROICH: Screenshot © geogebra.org.

Zum Zeitpunkt, zu dem üblicherweise die Satzgruppe des PYTHAGORAS behandelt wird, sollten die Schüler/innen aus dem Physikunterricht mit Kräften bereits vertraut sein. Eventuell können die in Abschnitt 4 dargestellten physikalischen Informationen noch einmal in Erinnerung gebracht werden.

Das Experiment: An einem Punkt C greifen drei Kräfte an. $\vec{F_3}$ ist im gemeinsamen Angriffspunkt C mit einer Öse angebracht und weist senkrecht nach unten. An zwei Rollen A und B auf gleicher Höhe werden die Kräfte $\vec{F_1}$ und $\vec{F_2}$ umgelenkt, so dass alle Kräfte durch angehängte Massestücke realisiert werden. Alle verwendeten Massestücke haben die gleiche Masse. Dabei führen die Kräfte mit den Beträgen $F_1 = 4\,\mathrm{N}$, $F_2 = 3\,\mathrm{N}$, $F_3 = 5\,\mathrm{N}$ zu einer Gleichgewichtssituation, in der zwischen den Kräften $\vec{F_1}$ und $\vec{F_2}$ ein rechter Winkel entsteht (Abb. 2). Dies ist ein Standardexperiment, das sich in vielen Physikbüchern findet, um die vektorielle Addition oder Zerlegung von Kräften zu betrachten, und das hier einen physikalischen Zugang zum Satz des PYTHAGORAS ermöglicht.

Je nach Betrachter/in kann dieses Experiment Fragen hervorrufen („Ist das tatsächlich so, immer so?“) oder Erstaunen („Woher wissen die Kräfte, dass da ein rechter Winkel herauskommen soll?“) oder Achselzucken („Das ist halt Physik!“).

Bemerkenswert ist hier jedenfalls der Perspektivwechsel gegenüber dem mathematischen Standardzugang zum Satz des PYTHAGORAS, der als solcher überhaupt erst erkannt werden muss. Des Weiteren ist festzustellen, dass es für Schüler/innen schwierig sein kann, in diesem Experiment den Satz des PYTHAGORAS selbst zu entdecken. In der üblichen mathematischen Formulierung geht es ja um rechtwinklige Dreiecke und Quadrate über den Seiten („$a^2 + b^2 = c^2$“). Hier geht es aber um Kräfte und ihre Beträge, um Kräfteparallelogramme und damit um Längen und um Winkel. Ein Kräftegleichgewicht stellt sich immer ein, und dabei wird unter bestimmten Bedingungen für die Größe der Kräfte (d.h. Länge der Vektoren) ein rechter Winkel erzeugt. So wechselt der Fokus von den quadratischen Flächen auf Längen, und es geht jetzt vorrangig um Winkel, d.h. um den Kehrsatz des PYTHAGORAS.

In der Diskussion des Experiments stellt sich als erstes die Frage: Bleibt denn bei den gegebenen Kräften der rechte Winkel erhalten, wenn der Rollenabstand $c = |\overline{AB}|$ verändert wird? Oder ist der rechte Winkel abhängig von c? Dies lässt sich durch ein Experiment klären. Ergebnis: Es gibt keine Abhängigkeit vom Abstand c der Rollen A und B. Es entsteht genau dann ein rechter Winkel, wenn die Beträge der Kräfte ein pythagoräisches Tripel wie z.B. 3, 4, 5 bilden. Das Kräfteparallelogramm ist in dem Fall ein Kräfterechteck.

Dabei kam die nächste Frage auf: Was ergibt sich, wenn man für F_1, F_2, F_3 nicht-pythagoräische Tripel nimmt (also Tripel a, b, c, die die PYTHAGORAS-Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ nicht erfüllen)? In dem Fall werden im Experiment werden andere, nicht-rechte Winkel bei M erzeugt (was mathematisch zum Kosinussatz führt und ihn en passant vorbereitet). Das führt zu der Idee, das physikalische Experiment mit GeoGebra zu simulieren (Abb. 2). $\vec{F_R}$ (blau) ist die resultierende Kraft, die aus dem Zusammenwirken von $\vec{F_1}$ und $\vec{F_2}$ entsteht. Im Gleichgewichtsfall gilt $\vec{F_R} = -\vec{F_3}$. Der Vektor $-\vec{F_3}$ ist in der Abbildung rot gestrichelt dargestellt.

2 Interaktive Lösung durch systematisches Probieren

Zum systematischen Explorieren wurde interaktiv eine schrittweise Lösung entwickelt. Ändert man die Kräfte an den Schiebereglern, z.B. auf $F_1 = 3$ N, $F_2 = 3$ N, $F_3 = 5$ N, so ist zu

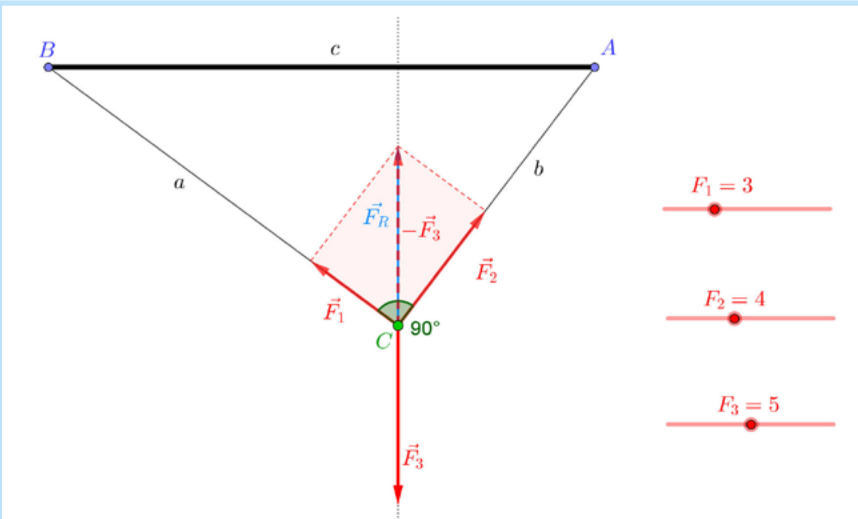

Abb. 2. Kräfte und Winkel beim Rollenexperiment für $F_1 = 3$ N, $F_2 = 4$ N, $F_3 = 5$ N, $\vec{F_R} = -\,,\vec{F_3}$. H.-J. ELSCHENBROICH: Screenshot © geogebra.org.

erkennen, dass $\vec{F_3}$ und $\vec{F_R}$ nicht mehr im Gleichgewicht stehen. Denn in der Simulation werden zunächst nur F_1, F_2, F_3 geändert, also Beträge der Kräfte, aber noch nicht die angreifenden Winkel. Dies ist eine Situation, die so im realen Experiment nicht auftreten kann! Denn dort würden bei Änderungen der Massen die Winkel simultan mit verändert. In Abbildung 3 liegt jedoch (noch) keine Gleichgewichtssituation vor, denn die Kräfte $\vec{F_3}$ und $\vec{F_R}$ setzten sich zu einer Kraft zusammen, die den Punkt C in der Realität wandern lassen würde. Im ersten Schritt der Simulation sieht man dann das Auseinanderfallen des blauen Vektors $\vec{F_R}$ und des rot gestrichelten Vektors $-\vec{F_3}$. Im zweiten Schritt gelingt es nun durch geeignetes Ziehen an C, die physikalisch korrekte Situation auf dem Bildschirm (wieder) herzustellen. Die beiden Vektoren kommen zur Deckung und es gilt $\vec{F_R} = -\vec{F_3}$ (Abb. 4). Damit ist die Welt also physikalisch wieder in Ordnung. Natürlich gibt es jetzt keinen rechten Winkel bei C, da F_1, F_2, F_3 kein pythagoräisches Tripel bilden. Durch die heuristische Strategie „Systematisches Probieren" findet man also eine Lösung, die aber bei neuen Werten jedes Mal wieder interaktiv zu erzeugen ist.

3 Konstruktive Lösung durch Rückwärtsarbeiten

Wünschenswert wäre daher eine GeoGebra-Konstruktion, die stets direkt die richtige Lösung produziert. Die heuristische Methode des Rückwärtsarbeitens hilft hier weiter. Denn in dem roten Kräfteparallelogramm können die Winkel γ_1 und γ_2 nach dem Kosinussatz berechnet werden, die Längen im Parallelogramm entsprechen den Beträgen F_1, F_2, F_3. Daraus erhält man für den Winkel α bei A: $\alpha = 90^\circ - \gamma_1$ und entsprechend für den Winkel β bei B: $\beta = 90^\circ - \gamma_2$. Damit lassen sich bei A und B Geraden konstruieren, die sich im ‚korrekten' Punkt C schneiden müssen (Abb. 5) und dadurch die Seiten a und b und den Winkel γ erzeugen.

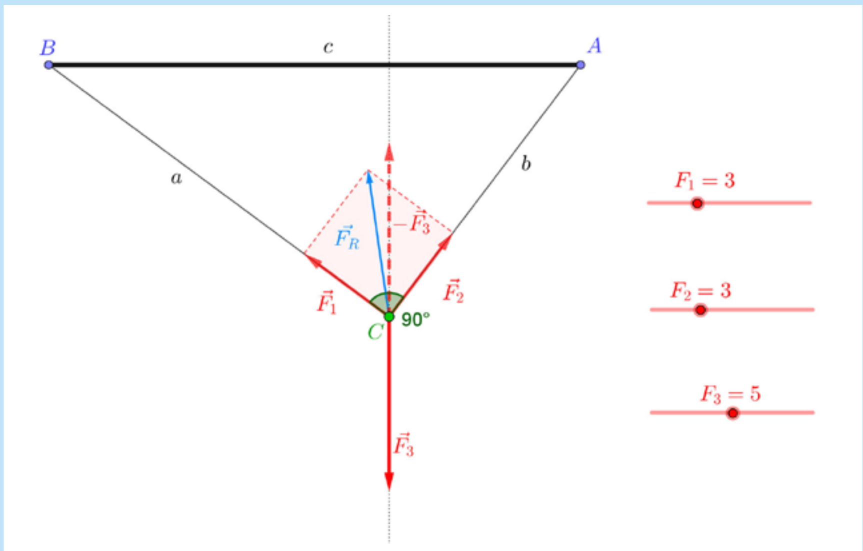

Abb. 3. F_1, F_2, F_3 bilden kein pythagoräisches Tripel, $\vec{F_R} \neq -\vec{F_3}$ H.-J. ELSCHENBROICH: Screenshot © geogebra.org.

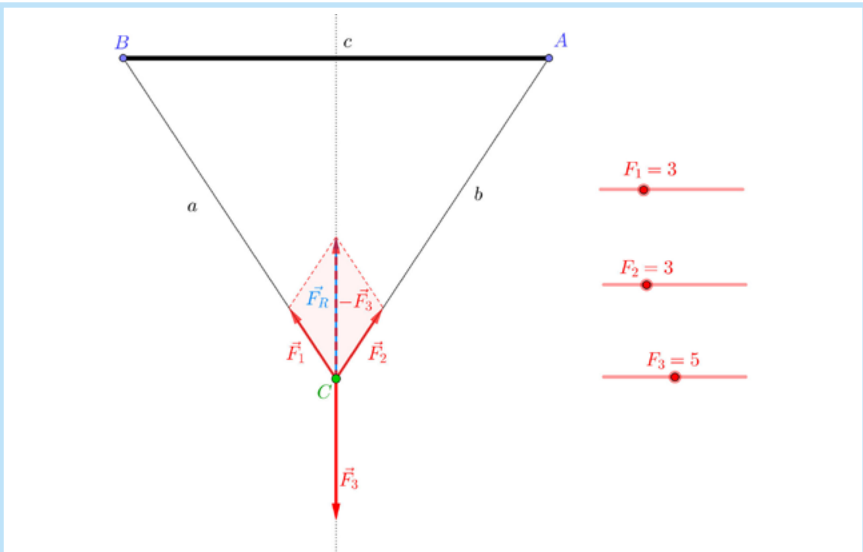

Abb. 4. Korrekte Lage von C durch interaktives Ziehen herbeigeführt. H.-J. ELSCHENBROICH: Screenshot © geogebra.org.

Eine Veränderung des Rollenabstandes c ändert nicht die Winkel und auch nicht die Längenverhältnisse $a : b : c$. Das ist hier in der dynamischen Simulation so wie im realen Experiment. Für ein pythagoräisches Tripel F_1, F_2, F_3 entsteht dann wie im physikalischen Experiment auch ein rechter Winkel.

Damit stellt diese GeoGebra-Datei eine geeignete Lernumgebung dar, in der eine Verallgemeinerung dieser Kräftezerlegung dynamisch visualisiert werden kann. Diese rein quantitative physikalische Betrachtung über die Kraftbeträge kann dann in späteren Jahrgängen mit Hilfe des Kosinussatzes mathematisch präzisiert werden.

4 Ein kurzer Blick in die Physik

Diese Informationen sollten den Schüler/inne/n aus dem Physikunterricht bekannt sein bzw. sollten erwähnt werden:

- Kräfte lassen sich durch Pfeile beschreiben. Dabei gibt die Länge des Pfeiles den Betrag der Kraft an, und die Richtung des Pfeiles zeigt an, in welche Richtung die Kraft wirkt.
- Wirken zwei Kräfte auf einen Punkt, so kann man die beiden Kräfte durch eine resultierende Kraft ersetzen, die die gleiche Wirkung erzeugt. Diese lässt sich wie bei der Addition von Vektoren geometrisch mit Hilfe der Diagonalen eines Parallelogramms ermitteln.

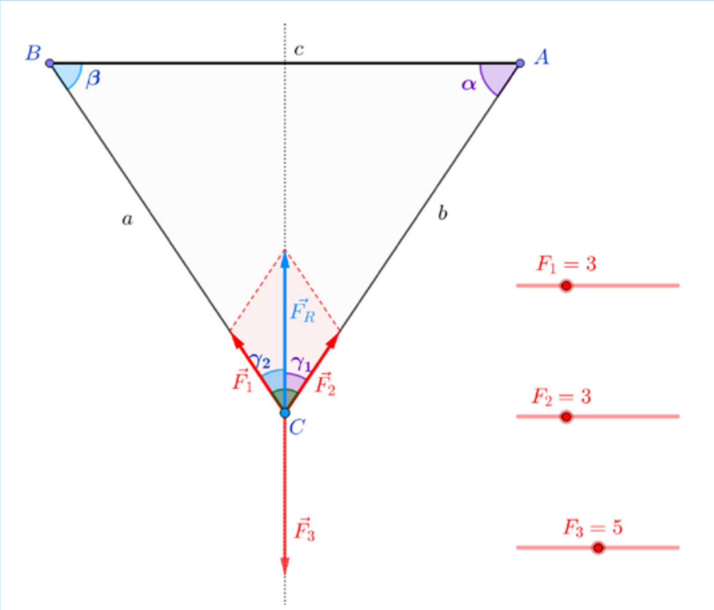

Abb. 5. Konstruktion, die die physikalisch korrekte Lage des Angriffspunktes C der Kräfte liefert.
H.-J. ELSCHENBROICH: Screenshot © geogebra.org.

- Wenn die Addition der Kräfte den Wert Null ergibt, ist das gleichbedeutend mit einer Situation, in der gar keine Kraft wirkt. Die Kräfte heben sich gegenseitig auf. Man spricht dann von einem Gleichgewichtszustand.
- Kräfte werden meistens mit dem Buchstaben $\vec{F}$ bezeichnet. Um den Vektorcharakter anzudeuten, ist es üblich, darüber einen Pfeil zu setzen. Fehlt der Pfeil, so ist der Betrag der Kraft gemeint, also $F = |\vec{F}|$.
- Kräfte werden in der Einheit Newton gemessen.
- Zu den physikalischen Arbeitsmethoden gehört, dass immer Idealisierungen angenommen werden und reale Störungen ignoriert werden (Massen werden auf einen Punkt konzentriert, Reibung wird außer Acht gelassen). In der GeoGebra-Simulation kann man jetzt diese Störungen eliminieren und sich auf den Idealzustand konzentrieren.

Die dynamischen Konstruktionen stehen als GeoGebra Book unter der Adresse *https://www.geogebra.org/m/hxmjvqa7* zur Verfügung.

HANS-JÜRGEN ELSCHENBROICH, elschenbroich@t-online.de war Lehrer für Mathematik und Informatik, Fachleiter Mathematik am ZfsL Neuss und Mitarbeiter der Medienberatung NRW.

WILFRIED DUTKOWSKI, wdutkowski@hs-euklid.de ist Lehrer für Mathematik und Physik an der inklusiven Gesamtschule Bonns Fünfte und war Mitarbeiter der Medienberatung NRW.

MICHAEL RÜSING, michael@ruesing-essen.de, hat am B.M.V.-Gymnasium in Essen die Fächer Mathematik, Physik und Informatik unterrichtet.