

El paso de la expresión $x_0 - \text{radio} < x < x_0 + \text{radio}$, al trabajo con valor absoluto se demuestra de la siguiente manera:

Si a toda la ecuación le restamos x_0 :

$$x_0 - x_0 - \text{radio} < x - x_0 < x_0 - x_0 + \text{radio}$$

$$-\text{radio} < x - x_0 < \text{radio}$$

Tomando la primera desigualdad

$$-\text{radio} < x - x_0$$

Multiplicando por -1 ambos lados de la desigualdad tenemos que

$$\text{radio} > -(x - x_0)$$

Tomando la segunda desigualdad

$$x - x_0 < \text{radio}$$

Combinando ambas desigualdades, se llega a:

$$|x - x_0| = \begin{cases} x - x_0 & \text{si } x - x_0 \geq 0 \\ -(x - x_0) & \text{si } x - x_0 < 0 \end{cases}$$

Ya que la definición de valor absoluto es:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$