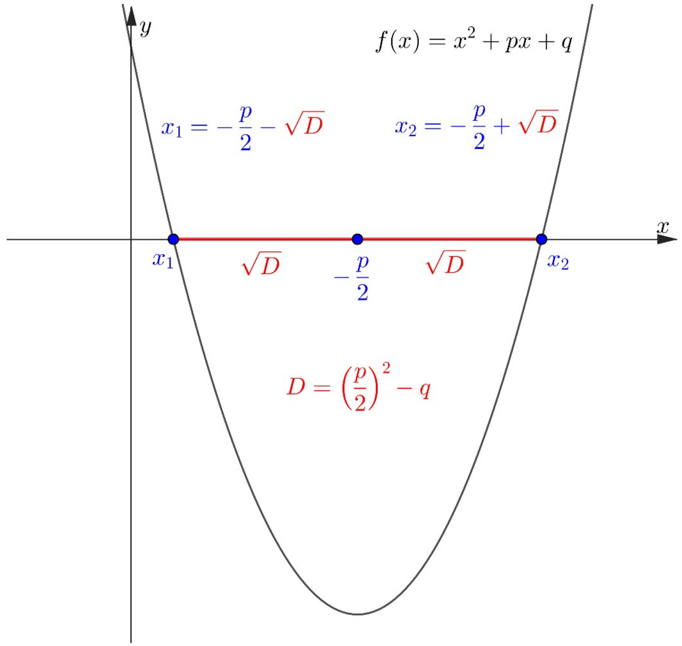
$\underline{p,q\text{-Formel:}}$

$$\begin{aligned} x^2+px+q &= 0 \\ x_{1/2} &= -\tfrac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q} \end{aligned}$$



Herleitung: Jede quadratische Gleichung lässt sich in die *allgemeine Form* $ax^2+bx+c=0$ bringen. Eine Division durch a ist dann erforderlich, um die *Normalform* $x^2+px+q=0$ zu erhalten.

$$\begin{aligned} x^2+px+q &= 0 && \mid -q \\ x^2+px &= -q \\ x^2+px+\underbrace{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2-\left(\tfrac{p}{2}\right)^2}_{\text{quadr. Ergänzung}} &= -q \\ \left(x+\tfrac{p}{2}\right)^2-\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 &= -q && \mid +\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 \\ \left(x+\tfrac{p}{2}\right)^2 &= \left(\tfrac{p}{2}\right)^2-q \\ \Leftrightarrow\ x+\tfrac{p}{2} &= \pm\sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2-q} \end{aligned}$$

Die Subtraktion von $\frac{p}{2}$ ergibt die zwei Lösungen gemäß obiger Formel. q.e.d.

Anmerkung: Anschaulich gesehen stellt die *Normalform* ein Nullstellenproblem dar, so wie oben im Schaubild zu erkennen. Daraus ersichtlich ist die Bedeutung des Wurzelinhalts, der *Diskriminante* D. Ist $D=0$, so gibt es nur eine Lösung, also eine berührende Nullstelle. Ist D dagegen negativ, so gibt es keine (reelle) Lösung, anschaulich somit keine Schnittstellen mit der x-Achse.

Sonderfälle: Die p,q-Formel funktioniert im Prinzip auch für die Sonderfälle, dass p oder q Null sind. Doch dann geht es viel einfacher:

- $p=0$: Es liegt eine sogenannte *reinquadratische Gleichung* vor. Beispiel: $x^2-16=0 \Leftrightarrow x^2=16 \Leftrightarrow x_1=-4 \wedge x_2=4$
- $q=0$: Hier hilft das *Faktorisieren*. Beispiel: $x^2-7x=0 \Leftrightarrow x\cdot(x-7)=0 \Leftrightarrow x_1=0 \wedge x_2=7$

Beispiel:

$$\begin{aligned} x^2+3x+\tfrac{1}{4} &= 0 \\ x_{1/2} &= -\tfrac{3}{2} \pm \sqrt{\tfrac{9}{4}-\tfrac{1}{4}} = -\tfrac{3}{2} \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

$x_1 = -\frac{3}{2}-\sqrt{2} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{3}{2}+\sqrt{2}$