Polynomier med ens rødder og heltallige ekstremumspunkter.

Formodning.

Der eksisterer forskellige heltallige rødder r_1 og r_2 således at polynomierne

$g(x) = x(x - r_1)(x - r_2)$ og $f(x) = x^{2n-2}(x - r_1)(x - r_2), n \in \mathbb{N}, n > 1.$

har heltallige ekstremumspunkter og $g(x)$ har heltalligt vendepunkt.

Denne formodning bekræftes ved sætning 1 på næste side.

Gentofte 03-02-2024.

Heine Strømdahl

1b9b4037-cbce-4e80-8f42-95c137914df4

Digitalt signeret af 1b9b4037-cbce-4e80-8f42-95c137914df4
DN: cn=1b9b4037-cbce-4e80-8f42-95c137914df4
Dato: 2024.02.03 16:19:13 +01'00'

Sætning 1.

Lad rodsættene $\binom{r_1}{r_2}$ og funktionerne $f(x)$ og $g(x)$ være givet således

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2304n^6 - 768n^5 - 2688n^4 + 912n^2 + 240n \\ 2304n^6 - 3840n^5 - 1152n^4 + 2304n^3 + 528n^2 - 144n \end{pmatrix}$$

$$\vee \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20736\,n^6 + 41472n^5 - 17280n^4 - 9600n^3 + 6000n^2 \\ -20736\,n^6 + 69120n^5 - 77184n^4 + 32640n^3 - 3600n^2 \end{pmatrix}$$

$$g(x) = x(x - mr_1)(x - mr_2)\ , m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$$

$$f(x) = x^{2n-2}(x - mr_1)(x - mr_2)\ , m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$$

$g(x)$ og $f(x)$ har trivielt de samme rødder. Både $g(x)$ og $f(x)$ har heltallige ekstremumspunkter, $g(x)$ har to og $f(x)$ har tre. $g(x)$ har tillige heltalligt vendepunkt.

Løsningsmetode til bekræftelse af formodningen.

Følgende to sætninger anvendes.

Sætning 2.

Parametrisering af semipæne polynomier (SP) med grad 2n.

Antag at $(n, m, t, s) \in \mathbb{Z}^4$ med $mts \neq 0, |m| \neq |t|, n \in \mathbb{N}, n > 1$.

Lad r_1, r_2 og $f(x)$ være givet ved

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(2n(2n-1)mt + 2nm^2) \\ s(2n(2n-1)mt + 2nt^2) \end{pmatrix} \text{ og } f(x) = x^{2n-2}(x - r_1)(x - r_2)$$

$f(x)$ er et semipænt polynomium.

Bevis: Se reference[i] eller PDF-filen i linket SP med grad 2n.

Sætning 3. (Som er et velkendt resultat) [ii]

Antag at $(w, t, s) \in \mathbb{Z}^3$ med $wts \neq 0, |w| \neq |t|, s \in \mathbb{Z}$.

Lad r_1, r_2 og $f(x)$ være givet ved

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3s(2wt + w^2) \\ 3s(2wt + t^2) \end{pmatrix} \text{ og } f(x) = x(x - r_1)(x - r_2)$$

Da har $f(x)$ heltallige ekstrema for første og anden afledede.

Sætning 2 og 3 fører umiddelbart til ligningssystemet

$$3s(t^2 + 2tw) = z(2np^2 + 2n(2n-1)pq)$$

$$3s(w^2 + 2t\,w) = z(2nq^2 + 2n(2n-1)pq)$$

Der søges en løsning i $\{p, q, z\}$. GeoGebras CAS kom med to løsninger.

$p = p$

(*): $q = (2nt^2 + 2nw^2 + t^2 - w^2 \pm \sqrt[2]{l})\frac{p}{2t^2+4tw}$ hvor

$l = 4n^2t^4 + 4n^2w^4 - 8n^2\,t^2w^2 - 4nt^4 - 4nw^4 + 8nt^2w^2 + t^4 + w^4 + 8t\,w^3 + 18t^2w^2 + 8t^3w$

(**): $z = \frac{12n^2t^2 - 12n^2w^2 - 12nt^2 + 12nw^2 - 3t^2 - 12tw - 3w^2 \pm (6n-3)\sqrt[2]{l}}{(16\mathrm{n}^3 - 16\mathrm{n}^2)\mathrm{p}^2}$ [iii]

Først undersøges tilfældet med plustegnet foran $(6n-3)\sqrt[2]{l}$ i udtrykkene for z og q.

l kan omformes

$l = (2n-1)^2(t^4 + w^4) + 8(t^3w + tw^3) + \big(18 - 8n(n-1)\big)t^2w^2$

l skal være et kvadrattal hvilket fører til en ligning i t og w.

$l = u^2$

Venstresiden af denne ligning er et symmetrisk homogent polynomium med grad fire.

$(2n-1)^2(t^4 + w^4) + 8(t^3w + tw^3) + \big(18 - 8n(n-1)\big)t^2w^2 = u^2$

Ligningen kunne jeg ikke løse med GeoGebra trods mange forsøg, men ved nøje inspektion i et regneark dukker en mulig løsning op, og den kan bekræftes med kontrol:

Med $(t, w) = (2n+1, 2n-3)$ fås

$l = 1600n^4 - 3200n^3 + 1760n^2 - 160n + 4$

Ved simple omformninger får man et udtryk for l som kvadrattal

$l = 1600n^4 - 3200n^3 + 1760n^2 - 160n + 4 = 4(20n^2 - 20n + 1)^2$

$l = u^2 \Leftrightarrow 4(20n^2 + 20n - 1)^2 = u^2 \Leftrightarrow u = 2(20n^2 - 20n + 1)$

Herefter kan p sættes til $p = 2t^2 + 4tw$ hvorved q bliver heltallig iflg. (*). p og q bliver nu til

$p = 2(2n+1)^2 + 4(2n+1)(2n-3)) = 24n^2 - 8n - 10$

$q = 2nt^2 + 2nw^2 + t^2 - w^2 + u = 8n^2 - 8n - 6$ [iv]

Sæt nu

$z = 12n^2t^2 - 12n^2w^2 - 12nt^2 + 12nw^2 - 3t^2 - 12tw - 3w^2 + (6n-3)\sqrt[2]{l}$

Herved bliver z heltallig når $s = (16\mathrm{n}^3 - 16\mathrm{n}^2)\mathrm{p}^2$ iflg. (**).

$z = 432n^3 - 720n^2 + 300n$ [v] Kan z forkortes? Ved division op i parameteren s fås

$\frac{s}{z} = \frac{(16\mathrm{n}^3 - 16\mathrm{n}^2)\mathrm{p}^2}{432n^3 - 720n^2 + 300n} = \frac{(16\mathrm{n}^3 - 16\mathrm{n}^2)(24n^2 - 8n - 10)^2}{432n^3 - 720n^2 + 300n} = \frac{64n^4 - 48n^2 - 16n}{3}$ [vi]

Det ses at en parameter på blot $z = 3$ er tilstrækkelig!

Jf. sætning 2 kan der findes rødder for polynomiet $f(x)$ ud fra p, q og z:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(2n(2n-1)pq+2np^2) \\ 3(2n(2n-1)pq+2nq^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2304n^6-768n^5-2688n^4+912n^2+240n \\ 2304n^6-3840n^5-1152n^4+2304n^3+528n^2-144n \end{pmatrix}$$ vii

Hvilket er det første resultat i sætning 1 på nær parameteren m. Det følger umiddelbart af sætning 2 og 3 at $\begin{pmatrix} mr_1 \\ mr_2 \end{pmatrix}$ er rodsæt der frembringer de ønskede polynomier. Resultatet fortæller intet om hvorvidt rodsættet kan forkortes med en heltallig faktor, men det kan det som oftest – viser et CAS-værktøj.

Dernæst undersøges tilfældet med med minustegnet foran $(6n-3)\sqrt[2]{l}$ i udtrykkene for z og q.

Der søges en løsning i $\{p, q, z\}$ for ligningssystemet.

$p = p$

(*): $q = (2nt^2 + 2nw^2 + t^2 - w^2 - \sqrt[2]{l})\frac{p}{2t^2+4tw}$

$l = 4n^2t^4 + 4n^2w^4 - 8n^2\,t^2w^2 - 4nt^4 - 4nw^4 + 8nt^2w^2 + t^4 + w^4 + 8t\,w^3 + 18t^2w^2 + 8t^3w$

(**): $z = \frac{12n^2t^2-12n^2w^2-12nt^2+12nw^2-3t^2-12tw-3w^2-(6n-3)\sqrt[2]{l}}{(16\mathrm{n}^3-16\mathrm{n}^2)\mathrm{p}^2}$

Resultaterne ovenfor genbruges.

$u = 2(20n^2 - 20n + 1)$

$p = 24n^2 - 8n - 10$

$q = 2nt^2 + 2nw^2 + t^2 - w^2 - u = -72\,n^2 + 72n - 10$ viii

$z = 12n^2t^2 - 12n^2w^2 - 12nt^2 + 12nw^2 - 3t^2 - 12tw - 3w^2 - (6n-3)\sqrt[2]{l}$

Herved bliver z igen heltallig når $s = (16\mathrm{n}^3 - 16\mathrm{n}^2)\mathrm{p}^2$.

$z = -48\,n^3 + 36n + 12$ ix

Kan z igen forkortes? Ved division op i parameteren s fås

$$\frac{s}{z} = \frac{(16\mathrm{n}^3 - 16\mathrm{n}^2)\mathrm{p}^2}{= -48\,n^3 + 36n + 12} = \frac{(16\mathrm{n}^3 - 16\mathrm{n}^2)(24n^2 - 8n - 10)^2}{-48\,n^3 + 36n + 12} = -192\,n^4 + 320n^3 - \frac{400}{3n^2}$$

Det ses at en parameter på blot $z = 3$ igen er tilstrækkelig!

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(2n(2n-1)pq + 2np^2) \\ 3(2n(2n-1)pq + 2nq^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20736\,n^6 + 41472n^5 - 17280n^4 - 9600n^3 + 6000n^2 \\ -20736\,n^6 + 69120n^5 - 77184n^4 + 32640n^3 - 3600n^2 \end{pmatrix}$$

Det følger igen at $\begin{pmatrix} mr_1 \\ mr_2 \end{pmatrix}$ er rodsæt der frembringer polynomierne i sætningen.

Kontrol-bevis af sætning 1 med CAS-værktøj.↓↓

Kontrol-bevis af sætning 1 med CAS-værktøj.

Det først rodsæt efterprøves:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$x = 2304n^6 - 5376n^5 + 1152n^4 + 3456n^3 - 816n^2 - 720n$

$\vee\ x = 2304n^6 - 1536n^5 - 2688n^4 + 768n^3 + 1104n^2 + 96n - 48$

Og

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 768n^6 - 768n^5 - 1152n^4 + 384n^3 + 624n^2 + 144n$

$\vee\ x = 2304n^6 - 2304n^5 - 1408n^4 + 1152n^3 + 336n^2 - 80n$ [x]

I det andet tilfælde viser en indtastning at

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -20736\,n^6 + 82944n^5 - 120960n^4 + 76800n^3 - 18000n^2$

$\vee\ x = -20736\,n^6 + 48384n^5 - 28800n^4 - 6528n^3 + 8880n^2 - 1200n$

Også $g(x)$ opfylder betingelserne. [xi]

To eksempler på polynomier med ens rødder og heltallige ekstremumspunkter.

$f(x) = x^8(x - 23580480)(x - 31944000)$

$g(x) = x(x - 23580480)(x - 31944000)$ [xii]

Grad 100. Kogepunktspolynomiet.

Det nedenstående polynomium har samme gradtal som vands kogepunkt ved en atmosfæres tryk.

Det har tre ekstremumspunkter og tre rødder som alle er heltallige. Tredjegradspolynomiet med de samme rødder har heltallige ekstremumspunkter for første og anden afledede.

$f(x) = x^{98}(x - 852688200)(x - 875973000)$

$g(x) = x(x - 852688200)(x - 875973000)$

---

[i] Semipæne polynomier.

Definition. Semipæne polynomier.

Ved et har semipænt polynomium forstås et polynomium med lige grad, som har tre heltallige rødder og tre heltallige ekstremumspunkter. Forkortelse (SP).

Forord.

Semipæne polynomier er gode tasteopgaver på gymnasieniveau eftersom facit kommer ud som 'pæne hele tal'. I dette skrift indgår nogle forskellige opgaver, som er tiltænkt det gymnasiale niveau.

I arbejdet med de semipæne polynomier dukkede en – i hvert fald for mig – ganske overraskende og fascinerende sammenhæng op mellem sådanne polynomier og pythagoræiske tripler. Desuden viste det sig, at en nærliggende generalisering af sætninger om parametriseringer af SP med grad 4 og 6 til vilkårligt høje grader lå lige for, heller ikke hvad man lige kunne forvente. Denne generalisering er en form for delvis generalisering til vilkårligt høje tal af et velkendt resultat om pæne tredjegradspolynomier. [i]

Dette skrift, og særligt eksemplerne med SP som tillige har heltallige vendepunkter, ville jeg ikke kunne have gennemført uden hjælp af CAS-værktøjer, som viser sig meget brugbare.

Gentofte 31-01-2024.

Heine Strømdahl.

Sætning 1.

Betragt polynomiet $f(x)$ med grad $2n$, som er givet ved nedenstående betingelser A og B og ved forskriften

$$f(x) = 2n\int x^{2n-3}(x-u)(x-v)dx$$

A: $f(0) = 0$.

B: u og v er parametriseret således

$$u = s(\pm(2n-1)(m^2+t^2) + 2mt(2n^2-2n+1))$$

$$v = 4smt(n^2-n)$$

$$(m,s,t)\epsilon\mathbb{Z}^3, |m| \neq |n|, mts \neq 0, n\epsilon\ \mathbb{N}, n > 1.$$

$f(x)$ er et semipænt polynomium.

Bevis: Generalisering af metoden som anvendes i sætning 2, se side 12.

Sætning 2.

Parametrisering af semipæne fjerdegradspolynomier (SP).

For $(m, t, s) \in \mathbb{Z}^3$ med $mts \neq 0$, $|m| \neq |t|$ er fjerdegradspolynomierne med dobbeltrod i nul og rødder

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12smt+4sm^2 \\ 12smt+4st^2 \end{pmatrix} \text{ og } \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4sm^2-2st^2+2smt \\ 4sm^2-2st^2-2smt \end{pmatrix}$$

semipæne fjerdegradspolynomier.

Bevis: Side 5.

Bemærkning.

Heltallige translationer af SP af formen $g(x-m), m \in \mathbb{Z}$, er trivielt også SP.

Sætning 3.

Parametrisering af semipæne polynomier (SP) med grad 2n.

Antag at $(n, m, t, s) \in \mathbb{Z}^4$ med $mts \neq 0, |m| \neq |t|, n \in \mathbb{N}, n > 1$.

Lad r_1, r_2 og $f(x)$ være givet ved

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(2n(2n-1)mt+2nm^2) \\ s(2n(2n-1)mt+2nt^2) \end{pmatrix} \text{ og } f(x) = x^{2n-2}(x-r_1)(x-r_2)$$

$f(x)$ er et semipænt polynomium.

Conjecture.

1: For ethvert n findes der små værdier af m og t hvor $f(x)$ tillige har to heltallige vendepunkter. Nedenfor er der 6 eksempler herpå for $n = 2 \dots 7$.

2: For ethvert n findes der uendeligt mange SP med $s = 1$ hvor $f(x)$ tillige har to heltallige vendepunkter.

3: For ethvert n findes der et pænt tredjegradspolynomium og et SP af ovenstående form (dvs. med grad $2n$), som har fælles rødder. Eksempler for $n = 2, 3, 4$ og 222 m.fl. er opskrevet på side 14.

Punkt to er bevist af talteoretikere i tilfældet hvor $n = 2$. [i]

Bevis sætning 3. Indtaster man polynomiet i et CAS-værktøj og løser ligningen $f'(x) = 0$ får man

$f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$x = 4m^2pqs - 4mpqs \vee x = 4m^2pqs + 2mp^2s + 2mq^2s - 4mpqs - p^2s - q^2s + 2pqs$

Sætningen er en nærliggende generalisering af formlen i sætning 2 betragtet sammen med en tilsvarende formel for semipæne sjettegradspolynomier, som kan udledes på næsten 100% identisk vis med beviset for sætning 2:

Parametrisering af semipæne sjettegradspolynomier (SP).

Antag at $(m, t, s) \in \mathbb{Z}^3$ med $mts \neq 0, |m| \neq |t|$.

Lad r_1, r_2 og $f(x)$ være givet ved

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(30mt+6m^2) \\ s(30mt+6nt^2) \end{pmatrix} \text{ og } f(x) = x^4(x - r_1)(x - r_2)$$

$f(x)$ er et semipænt polynomium. [i]

Beviset for sætning 3 kan formentlig også udledes på ligefrem vis ud fra resultatet i sætning 1 og med hjælp at CAS-værktøj. QED.

Eksempler på semipæne fjerdegradspolynomier med relativt små koefficienter.

$f(x)$

$x^4 + 28x^3 + 160x^2 = x^2(x + 8)(x + 20)$	$x^4 - 4x^3 - 4896x^2 = x^2(x + 68)(x - 72)$
$x^4 + 24x^3 + 82x^2 - 240x + 133$	$x^4 + 12x^3 - 80x^2 - 192x + 1024$
$x^4 + 8x^3 - 110x^2 + 1125$	$x^4 - 134x^2 + 504x + 637$
$x^4 - 56x^3 + 720x^2$	$x^4 - 60x^3 + 894x^2 - 1612x + 777$

Elevopgaver til gymnasialt niveau.

1A: Vis med hjælp af CAS-værktøj at $f(x) = x^2(x - 308)(x - 360)$ er et semipænt fjerdegradspolynomium med to heltallige vendepunkter.

1B-1: Antag nu at u er et vilkårligt helt tal, som ikke er nul.

Bevis med og uden CAS-værktøj at $f(x) = x^2(x - 308u)(x - 360u)$ er er et semipænt fjerdegradspolynomium med to heltallige vendepunkter.

1B-2:

Undersøge betingelser for hvornår $f(x) = x^3(x - u)$, $f(x) = x^2(x - u)^2$, $f(x) = x(x - u)^3$ måtte være pæne fjerdegradspolynomier i den forstand at både første og anden afledede har heltallige rødder.

2: Bevis med hjælp af CAS at heltallige translationer af formen $g(x - m), m \in \mathbb{Z}$ af

$f(x) = x^2(x + 8)(x + 20)$ er et SP.

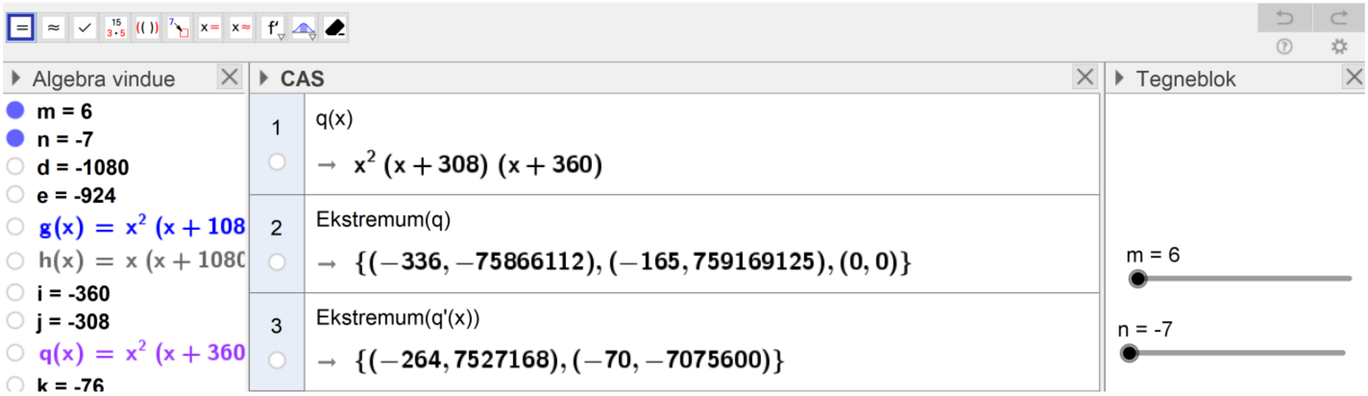
Bevis mere generelt med hjælp af CAS at heltallige translationer af ovenstående form af vilkårlige SP også er SP.

3: Bevis med CAS-værktøj at polynomierne i sætning 3 er SP.

Eksempler på SP med to heltallige vendepunkter. ↓

n=2.

Et eksempel på ovenstående fremkommer allerede ved små tal for m og n i parametriserings-formlen i sætningen. I skærmklippet er det $q(x)$ på linje et, det er beregnet med hjælp af skydere i GeoGebra-programmet.



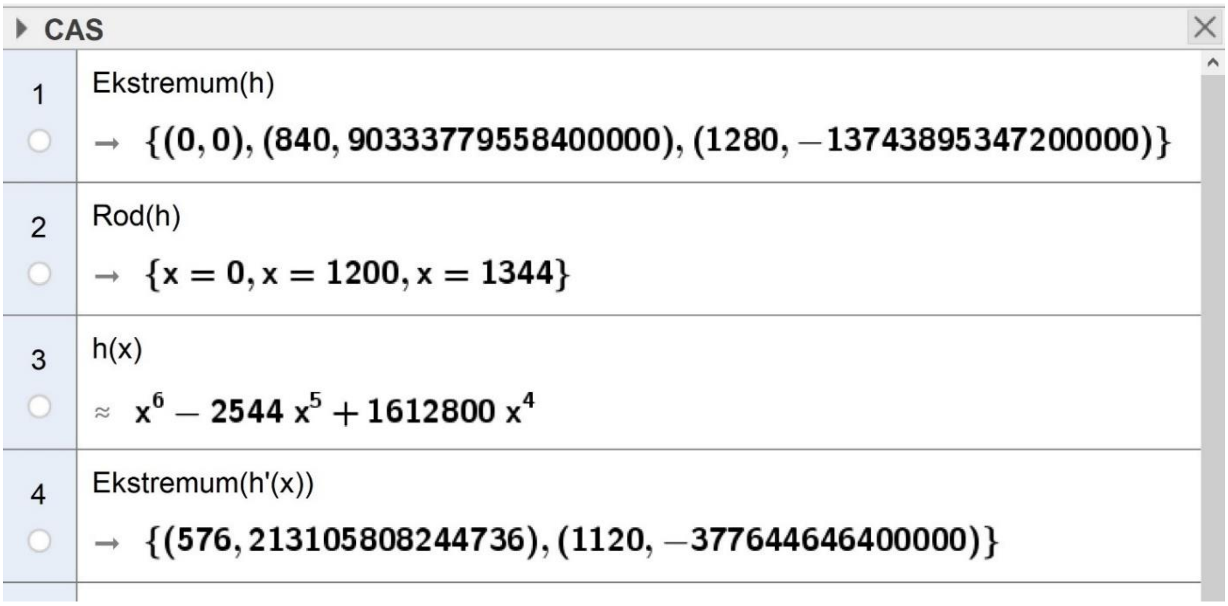
Tre andre eksempler på sådanne polynomier kan tilgås i linket til "[On rational-derived quartics]()", de er også medtaget i et skærmklip i slutnoter.[i]

Bull. Austral. Math. Soc. 11D25, 11G05
Vol. 51 (1995) [121–132]

ON RATIONAL-DERIVED QUARTICS

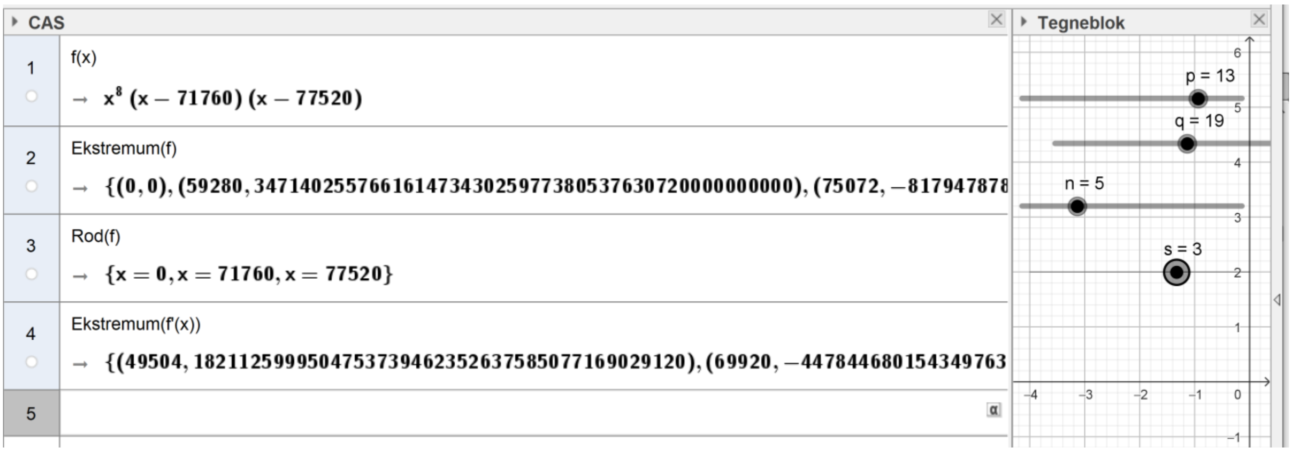
R.H. Buchholz and S.M. Kelly

n=3.

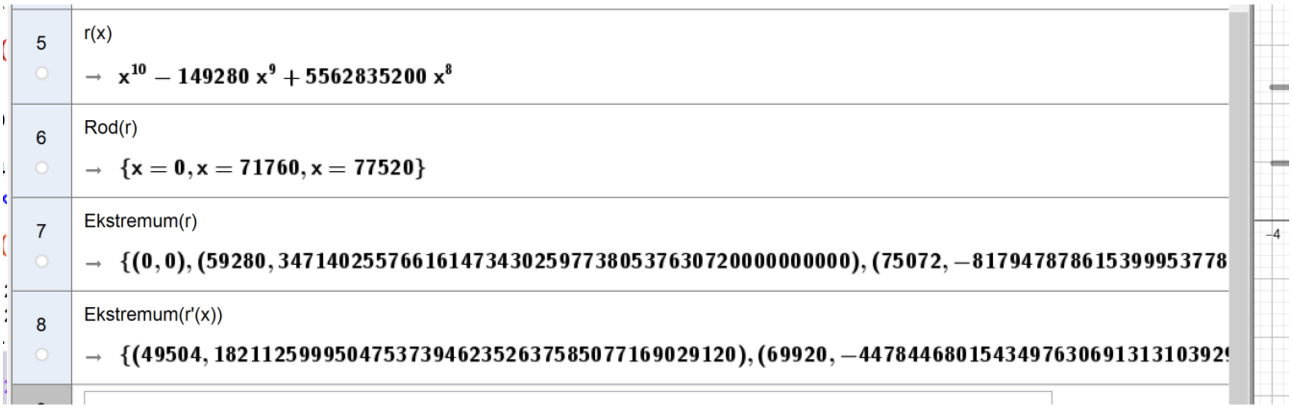


---

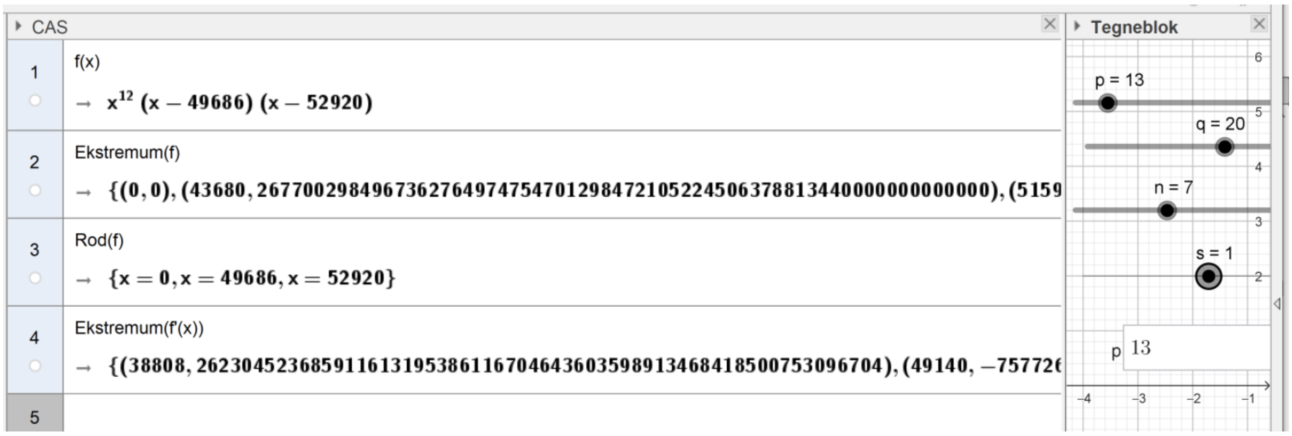
n=4


CAS
1
f(x)
→ x^8 (x − 71760) (x − 77520)
2
Ekstremum(f)
→ {(0, 0), (59280, 34714025576616147343025977380537630720000000000), (75072, −817947878
3
Rod(f)
→ {x = 0, x = 71760, x = 77520}
4
Ekstremum(f'(x))
→ {(49504, 1821125999504753739462352637585077169029120), (69920, −447844680154349763
5
Tegneblok
p = 13
q = 19
n = 5
s = 3

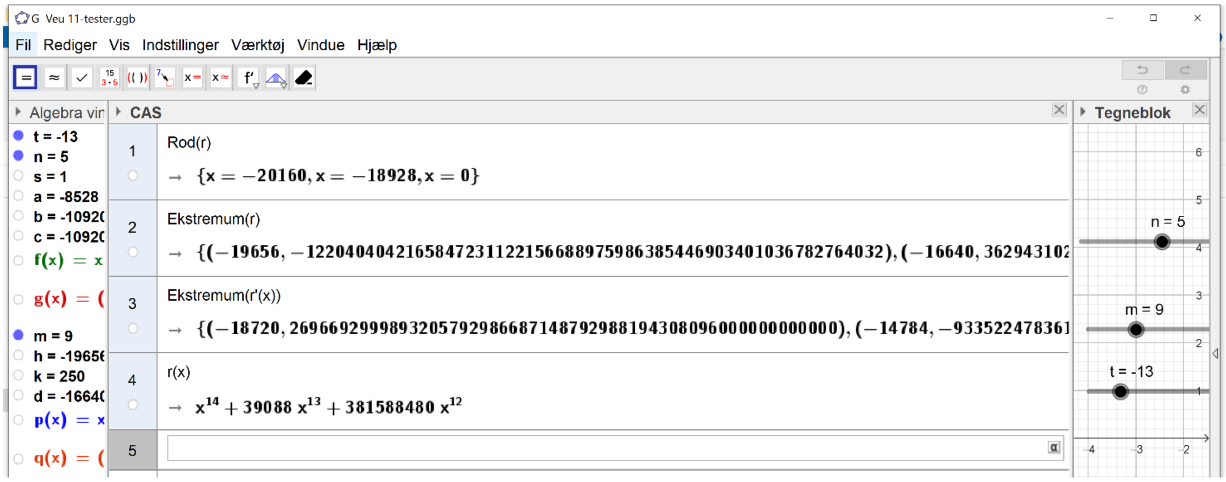
n=5.


5
r(x)
→ x^10 − 149280 x^9 + 5562835200 x^8
6
Rod(r)
→ {x = 0, x = 71760, x = 77520}
7
Ekstremum(r)
→ {(0, 0), (59280, 34714025576616147343025977380537630720000000000), (75072, −817947878615399953778
8
Ekstremum(r'(x))
→ {(49504, 1821125999504753739462352637585077169029120), (69920, −447844680154349763069131310392

n=6


CAS
1
f(x)
→ x^12 (x − 49686) (x − 52920)
2
Ekstremum(f)
→ {(0, 0), (43680, 2677002984967362764974754701298472105224506378813440000000000000), (5159
3
Rod(f)
→ {x = 0, x = 49686, x = 52920}
4
Ekstremum(f'(x))
→ {(38808, 262304523685911613195386116704643603598913468418500753096704), (49140, −75772
5
Tegneblok
p = 13
q = 20
n = 7
s = 1
p 13

n=7



Pæne og semipæne fjerdegradspolynomier. Pythagoræiske tripler. ↓

Næste side

Pæne og semipæne fjerdegradspolynomier. Pythagoræiske tripler.

Definition.

Ved et semipænt fjerdegradspolynomium forstås et fjerdegradspolynomium, som har præcis tre forskellige heltallige rødder og tre heltallige ekstremumspunkter. Ifølge algebraens fundamentalsætning må en af rødderne nødvendigvis være en dobbeltrod.

I dette indlæg gennemføres en simpel udledning af en parametrisering af semipæne fjerdegradspolynomier. Det viser sig, at der er en afbildning fra mængden af pythagoræiske tripler ind i mængden af semipæne fjerdegradspolynomier.

Det uafklarede eksistensspørgsmål om pæne fjerdegradspolynomier.

Talteoretikere beviste i anden halvdel af det 20. århundrede, at der findes uendeligt mange semipæne fjerdegradspolynomier hvor den anden afledede har to heltallige ekstrema[i], fire eksempler herpå medtages i dette dokument. Det vides ikke om der eksisterer et 'rigtigt pænt' fjerdegradspolynomium med hele fire forskellige heltallige rødder og hhv. tre og to heltallige ekstrema for første og anden afledede.

Sætning.

Parametrisering af semipæne fjerdegradspolynomier (SP).

For $(m, n, s) \in \mathbb{Z}^3$ med $mn \neq 0$, $s \neq 0$ og $s \equiv 0\ (Mod\ 2)$ er fjerdegradspolynomierne med dobbeltrod i nul og rødder

$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s(3mn+m^2) \\ 2s(3mn+n^2) \end{pmatrix}$ hhv. $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(2m^2-n^2+mn) \\ s(2m^2-n^2-mn) \end{pmatrix}$

semipæne fjerdegradspolynomier.

Bemærkning. Heltallige translationer af SP af formen $g(x-m), m \in \mathbb{Z}$, er trivielt også SP.

Eksempler på semipæne fjerdegradspolynomier med relativt små koefficienter.

$f(x)$

$x^4 + 28x^3 + 160x^2 = x^2(x+8)(x+20)$	$x^4 - 4x^3 - 4896x^2 = x^2(x+68)(x-72)$
$x^4 + 24x^3 + 82x^2 - 240x + 133$	$x^4 + 12x^3 - 80x^2 - 192x + 1024$
$x^4 + 8x^3 - 110x^2 + 1125$	$x^4 - 134x^2 + 504x + 637$
$x^4 - 56x^3 + 720x^2$	$x^4 - 60x^3 + 894x^2 - 1612x + 777$

Bevis.

Se næste side ↓

1: Ligningsløsning med GeoGebras CAS.

1	(x-u)(x-v)x $\rightarrow\ x\,(-u+x)\,(-v+x)$
2	$1 Integral: $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}u\,x^3 - \frac{1}{3}v\,x^3 + \frac{1}{2}u\,v\,x^2 + c_1$
3	12*(1 / 4 x⁴ - 1 / 3 u x³ - 1 / 3 v x³ + 1 / 2 u v x²) $\rightarrow\ 3x^4 - 4u\,x^3 - 4v\,x^3 + 6u\,v\,x^2$
4	3x⁴ - 4u x³ - 4v x³ + 6u v x²=0 Beregn: $\left\{x = \frac{2u+2v-\sqrt{2u^2-5uv+2v^2}\sqrt{2}}{3}, x = \frac{2u+2v+\sqrt{2u^2-5uv+2v^2}\sqrt{2}}{3}, x = 0\right\}$
5	Beregn(2u² - 5u v + 2v² = 2p², u) $\rightarrow\ \left\{u = \frac{5v-\sqrt{16p^2+9v^2}}{4}, u = \frac{5v+\sqrt{16p^2+9v^2}}{4}\right\}$

2-1: Antag nu, at $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0,0,0\}$ således at $(|x|, |y|, |z|)$ er en pythagoræisk tripel, hvilket er tilfældet når $x^2 + y^2 = z^2$. Betragt $p = 3x$, $v = 4y$, bemærk at både p og v kan være negative. Da er

$$16p^2 + 9v^2 = 16 \cdot (3x)^2 + 9 \cdot (4y)^2 = 16 \cdot 9 \cdot (x^2 + y^2) = 144(x^2 + y^2)$$

Det følger af resultatet i skærmbilledet at

$$u = \frac{\left(5v + \sqrt[2]{16p^2 + 9v^2}\right)}{4} = \frac{\left(5 \cdot 4y + 12\sqrt[2]{y^2 + x^2}\right)}{4} = 5y + 3\sqrt[2]{x^2 + y^2}$$

Rødderne findes:

$$r_1 = \frac{\left(2u + 2v + \sqrt[2]{2}\sqrt[2]{2u^2 - 5u\,v + 2v^2}\right)}{3}$$

$$r_1 = \frac{(2u + 2v + 2p)}{3}$$ (jf. linje 5 i skærmbilledet)

$$r_1 = \frac{\left(2 \cdot (5y\ +\ 3\sqrt[2]{x^2 +\ y^2})\ +\ 2 \cdot 4y\ +\ 2 \cdot 3x\right)}{3}$$

$$r_1 = \frac{\left(10y + 3\sqrt[2]{x^2 +\ y^2} +\ 8y\ +\ 6x\right)}{3}$$

$$r_1 = 6y + 2\sqrt[2]{x^2 +\ y^2} + 2x$$

Og dermed

$$r_2 = 6y + 2\sqrt[2]{x^2 +\ y^2} - 2x$$

$$r_3 = 0$$

Bemærkning.

I tilfældet hvor x er et lige tal fremgår det ved ganske simple betragtninger at de to substitutioner kan halveres, dvs. $p = 3x$, $v = 4y$. Det fremgår tillige at udtrykket for rødderne i dette tilfælde halveres.

Man kan gå et skridt videre og substituere (x, y) med den velkendte parametriserede form for alle pythagoræiske tripler, som her ses i et skærmklip fra Wikipedia:

remedied by inserting an additional parameter k to the formula. The following will generate all Pythagorean triples uniquely:

$$a = k \cdot (m^2 - n^2),\ \ b = k \cdot (2mn),\ \ c = k \cdot (m^2 + n^2)$$

where m, n, and k are positive integers with $m > n$, and with m and n coprime and not both odd.

Jf. ovenstående antages at $x\ og\ y$ kan være negative. Man får derfor to substitutioner, i stedet for n bruges t:

$x = s(m^2 - t^2), y = 2smt.$ 2: $y = s(m^2 - t^2), x = 2smt, (m, t, s)\epsilon\mathbb{Z}^3, m \neq t, mts \neq 0.$

1:

$$r_1 = 6y + 2\sqrt[2]{x^2 +\ y^2} + 2x$$

$$r_1 = 6 \cdot 2smt + 2\sqrt[2]{\left(s(m^2 - t^2)\right)^2 +\ (2smt)^2} + 2s(m^2 - t^2)$$

$$r_1 = 12smt + 2s\sqrt[2]{m^4 + t^4 - 2m^2t^2 +\ 4m^2t^2} + 2s(m^2 - t^2)$$

$$r_1 = 12smt + 2s\sqrt[2]{m^4 + t^4 + 2m^2t^2} + 2s(m^2 - t^2)$$

$$r_1 = 12smt + 2s\sqrt[2]{((m^2 + t^2))^2} + 2s(m^2 - t^2) = 12smt + 4sm^2 \text{ og da}$$

$$r_2 = 12smt + 2s\sqrt[2]{((m^2 + t^2))^2} - 2s(m^2 - t^2) = 12smt + 4st^2$$

2:

$$r_1 = 6 \cdot s(m^2 - t^2) + 2s\sqrt[2]{((m^2 + t^2))^2} + 2 \cdot 2smt$$

$$r_1 = 8sm^2 - 4st^2 + 4smt \quad \text{og dermed}$$

$$r_s = 8sm^2 - 4st^2 - 4smt.$$

Som omtalt ovenfor kan dette udtryk halveres:

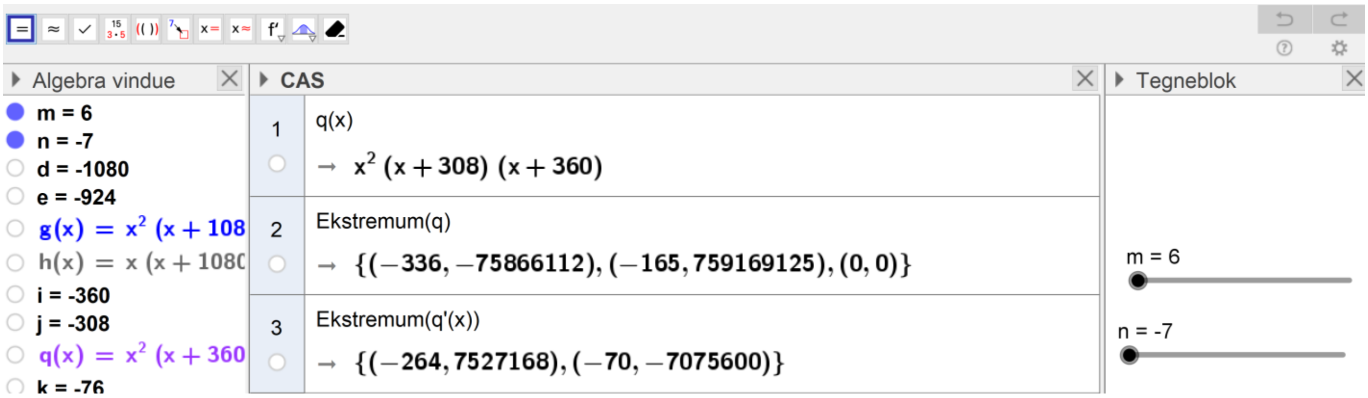
$$r_1 = 4sm^2 - 2st^2 + 2smt \quad \text{og dermed}$$

$$r_s = 4sm^2 - 2st^2 - 2smt$$

QED.

Fjerdegradspolynomier med tre forskellige heltallige rødder og heltallige ekstrema for første og anden afledede.

Et eksempel på ovenstående fremkommer allerede ved små tal for m og t i parametriserings-formlen i sætningen. I skærmklippet er det $q(x)$ på linje et, det er beregnet med hjælp af skydere i GeoGebra-programmet.



Tre andre eksempler på sådanne polynomier kan tilgås i linket til "On rational-derived quartics", de er også medtaget i et skærmklip i slutnoter.[i]

BULL. AUSTRAL. MATH. SOC. VOL. 51 (1995) [121–132] 11D25, 11G05

ON RATIONAL-DERIVED QUARTICS

R.H. BUCHHOLZ AND S.M. KELLY

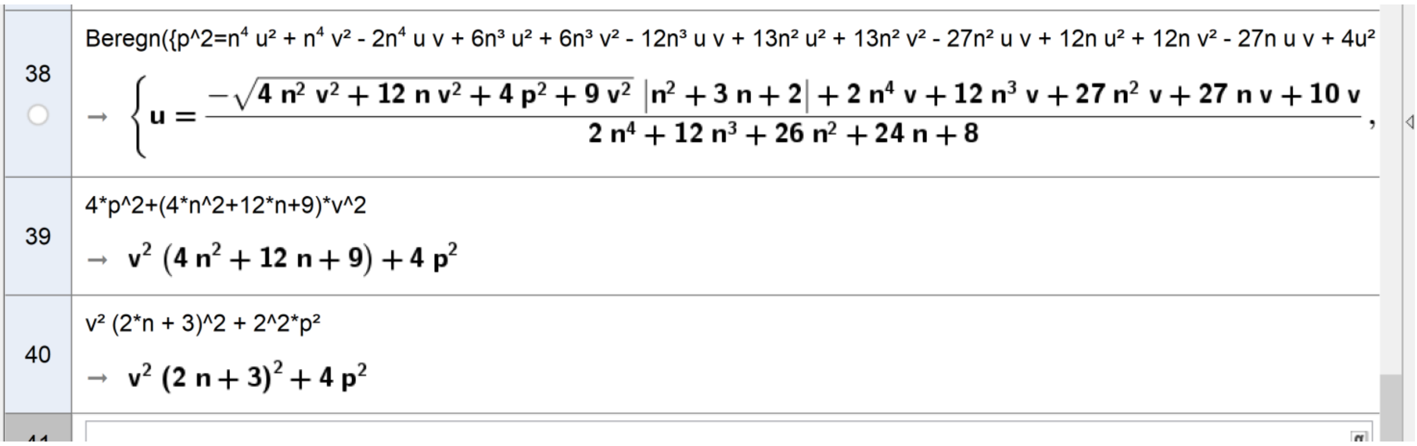
Bevis for sætning 1.

Metoden er den samme som i tilfældet n=0:

Grad 2n +4.

1: Ligningsløsning med GeoGebras CAS.

Bilag: [i]



Antag nu, at $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0,0,0\}$ således at $(|x|, |y|, |z|)$ er en pythagoræisk tripel, hvilket er tilfældet når $x^2 + y^2 = z^2$.

Betragt $p = (2n + 3)(n^2 + 3n + 2)x \;\; og \; v = 2(n^2 + 3n + 2)y$, bemærk at både p og v kan være negative. Da er

A:

$$4p^2 + (2n + 3)^2 v^2 = 4(2n + 3)^2 (n^2 + 3n + 2)^2 x^2 + (2n + 3)^2 2^2 (n^2 + 3n + 2)^2 y^2$$

$$= 4(2n + 3)^2 (n^2 + 3n + 2)^2 (x^2 + y^2)$$

B: $(n^2 + 3n + 2)^2 = n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4$ (halvdelen af nævneren i brøken i billedet ovenfor)

C: $\frac{2n^4 v + 12n^3 v + 27n^2 v + 27nv + 10v}{2n^4 + 12n^3 + 26n^2 + 24n + 8} = \frac{2n^2 v + 6nv + 5v}{2n^2 + 6n + 4}$ Man får

D:

$$u = \frac{\pm (n^2 + 3n + 2) \sqrt[2]{4n^2 v^2 + 12n\, v^2 + 4p^2 + 9v^2} + 2n^4 v + 12n^3 v + 27n^2 v + 27nv + 10v}{2n^4 + 12n^3 + 26n^2 + 24n + 8}$$

$$u = \frac{\pm 2(2n + 3)(n^2 + 3n + 2) \sqrt[2]{x^2 + y^2}}{2(n^2 + 3n + 2)^2} + \frac{2n^2 v + 6nv + 5v}{2n^2 + 6n + 4}$$

Ved substitution med $v = 2(n^2 + 3n + 2)y$ får man

$$u = 2n^2 y + 6ny + 5y \pm (2n + 3) \sqrt[2]{x^2 + y^2}$$ [i]

$$u = 2n^2y + 6ny + 5y \pm (2n+3)\sqrt[2]{x^2+y^2},$$

$$v = 2(n^2+3n+2)y$$

Man kan gå et skridt videre og substituere (x, y) med den velkendte parametriserede form for alle pythagoræiske tripler, som her ses i et skærmklip fra Wikipedia:

> remedied by inserting an additional parameter k to the formula. The following will generate all Pythagorean triples uniquely:
>
> $$a = k \cdot (m^2 - n^2),\ \ b = k \cdot (2mn),\ \ c = k \cdot (m^2 + n^2)$$
>
> where m, n, and k are positive integers with $m > n$, and with m and n coprime and not both odd.

Jf. ovenstående antages at $x\ og\ y$ kan være negative. Man får derfor to substitutioner

Substitution 1.

$x = s(m^2 - t^2), y = 2smt.$ 2: $y = s(m^2 - t^2), x = 2smt, (t, n, s) \epsilon \mathbb{Z}^3, t \neq n, tns \neq 0.$

$$u = 2n^2y + 6ny + 5y \pm (2n+3)\sqrt[2]{x^2+y^2}$$

$$u = 2n^2(2smt) + 6n(2smt) + 5(2smt) \pm (2n+3)\sqrt[2]{(s(m^2-t^2))^2 + (2smt)^2}$$ [i]

$$u = 4n^2smt + 12nsmt + 10smt \pm s(2n+3)\sqrt[2]{(m^2-t^2)^2 + (2mt)^2}$$

$$u = 4n^2smt + 12nsmt + 10smt \pm s(2n+3)(m^2+t^2)$$

Og

$$v = 2(n^2+3n+2)y = 2(n^2+3n+2)2smtv = 4smt(n^2+3n+2)$$

Ved substitutionen $2n + 4 = 2z$, $n \to z \to n$ fås formuleringen i sætningen idet

$$2n + 4 = 2z \Leftrightarrow n = z - 2 \quad , \ 2n + 4 = 2z \Leftrightarrow 2n + 3 = 2z - 1$$

Trin A: $n \to z$

$$u = 4n^2smt + 12nsmt + 10smt \pm s(2n+3)(m^2+t^2)$$

$$v = 4smt(n^2+3n+2)$$

$\to n \to z$

$$u = 4(z-2)^2smt + 12s(z-2)mt + 10smt \pm s(2z-1)(m^2+t^2)$$

$$v = 4smt((z-2)^2 + 3(z-2) + 2)$$

Trin B: $z \to n.$

$$u = 4(n-2)^2smt + 12s(n-2)mt + 10smt \pm s(2n-1)(m^2+t^2)$$

$u = s(\pm(2n-1)(m^2+t^2) + 2mt(2n^2-2n+1))$

$v = 4smt((n-2)^2 + 3(n-2) + 2) = 4smt(n^2 + 4 - 4n + 3n - 6 + 2)$

$v = 4smt(n^2 - n)$

QED.

Særlige polynomier.

3X54 polynomiet. Et unikt pænt tredjegradspolynomium?

Det følgende særprægede tredjegradspolynomium med 3X54 er 'pænt', dvs. det har to forskellige rødder og heltallige ekstrema for både første og anden afledede. Det dukkede i mit regneark. Måske er det unikt?

$$f(x) = x^3 - 54x^2 + 540x + 5400$$

Polynomier af hhv. 4. og 3. grad, som har heltallige ekstrema og ens rødder.

1: [i]

$f(x) = x\,(x - 264)(x - 840)$

$g(x) = x^2(x-264)(x-840)$

2:

$f(x) = x\,(x - m264)\,(x - m840)$

$g(x) = x^2\,(x - m264)\,(x - m840), m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$

Polynomier af hhv. 6. og 3. grad, som har heltallige ekstrema og ens rødder.

1:

$f(x) = x(x - 1224)\,(x - 2184)$

$g(x) = x^4\,(x - 1224)\,(x - 2184)$

2:

$f(x) = x(x - m1224)\,(x - m2184)$

$g(x) = x^4\,(x - m1224)\,(x - m2184), m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$

Polynomier af hhv. 8. og 3. grad, som har heltallige ekstrema og ens rødder.

1: $f(x) = x^6(x + m22080)(x + m32832)$

2: $g(x) = x(x + m22080)(x + m32832)$, $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. [i]

3. og 10. grad.

$f(x) = x\,(x + m60900)\,(x + m82500)$

$g(x) = x^8\,(x + m60900)\,(x + m82500), m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$ [i]

3. og 12. grad.

$f(x) = x\,(x - m113400)\,(x - m145080)$

$g(x) = x^{10}(x - m113400)\,(x - m145080)\,, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$ [i]

16. grad.

$f(x) = x^{14}\,(x - m410592)\,(x - m491232)$

$g(x) = x(x - m410592)\,(x - m491232)\,, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$

30. grad.

$f(x) = x^{28}(x - m2018520)\,(x - m2213400)$

$g(x) = x(x - m2018520)\,(x - m2213400)$

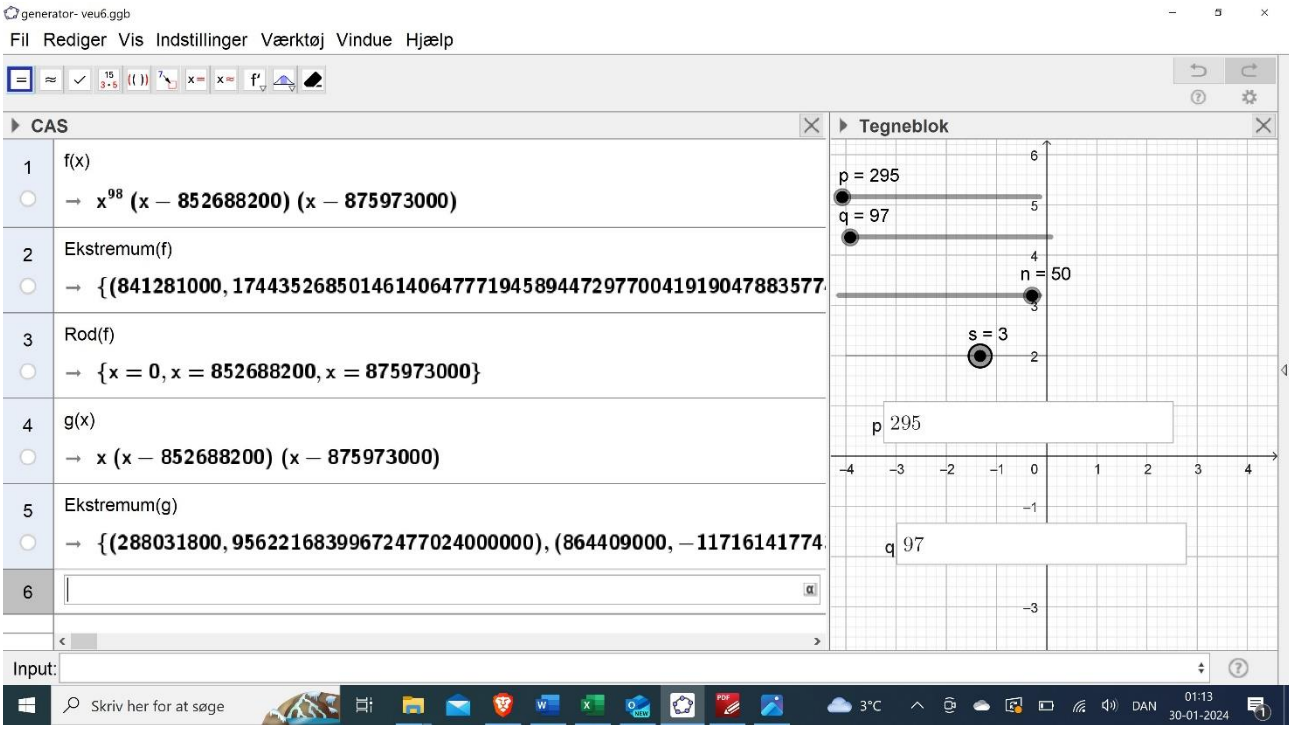
Grad 100. Kogepunktspolynomiet.

Det nedenstående polynomium har samme gradtal som vands kogepunkt ved en atmosfæres tryk.

Det har tre ekstremumspunkter og tre rødder som alle er heltallige. Tredjegradspolynomiet med de samme rødder har heltallige ekstremumspunkter for første og anden afledede.

$f(x) = x^{98}(x - 852688200)(x - 875973000)$

$g(x) = x(x - 852688200)(x - 875973000), m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$



Grad 108.

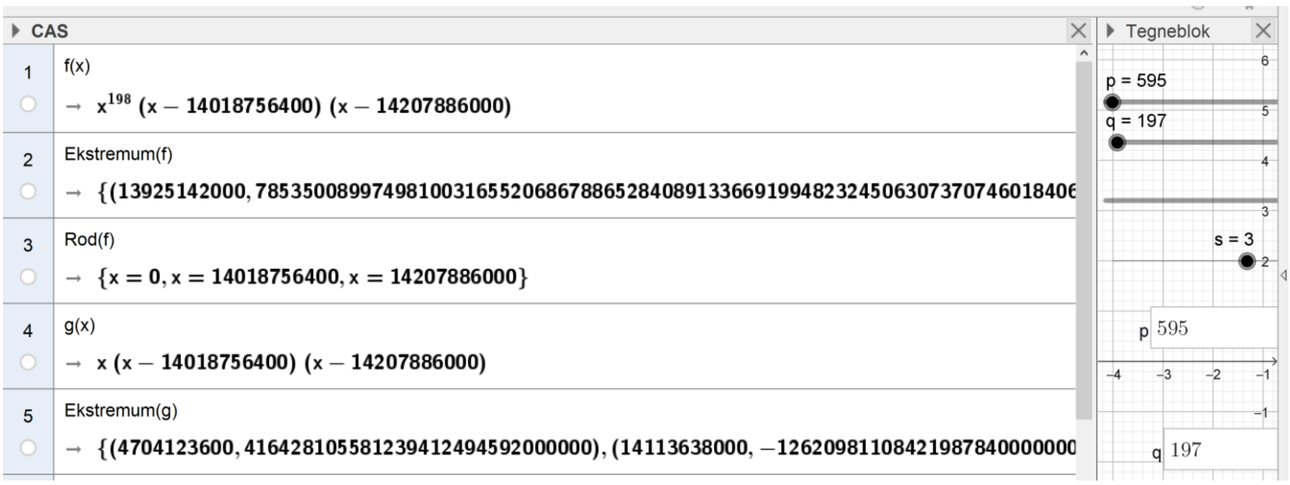
$$f(x) = x^{106}(x - 388258920)(x - 398058408)$$

$$g(x) = x(x - 388258920)(x - 398058408)$$

Polynomier med grad 200 og 3, som har heltallige ekstrema og ens rødder.

$$f(x) = x^{198}(x - m14018756400)(x - m14207886000)$$

$$g(x) = x(x - m14018756400)(x - m14207886000), m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$



Grad 222.

$f(x) = x^{220}\,(x - 7112813400)\,(x - 7199162520)$ [i]

$g(x) = x(x - 7112813400)\,(x - 7199162520)$

Grad 300.

$f(x) = x^{298}\,(x - 23870068200)\,(x - 24083913000)$

$f(x)$ har nedenstående heltallige ekstrema. [i]

{(23763861000,
3586257972611825326495376663799123507895271476059285136373159225758
4588068215574223764878048035149222330872809727615562389695493626600
1459172622838643995232854000398040464856079062779386533415446114617
7666983698893802417310981639121344934531910160337037454057187077347
2537166584409191740415520581225384663189966648651850155503551894209
9482384107843522131359394330784578590044078979980875231709316073538
5096712306002025219703214390223054682350140621814154744142521019652
7364451796974784250904447413629555821020564233727836668731161175353
1236214092953682616565529649342075576311391845120823059404669044544
2426701508122478596459201340670294008500150818279946643062821965892
5504950533699362635847058691366447225448413293917086135558215483885
4819262770661205384382336591770998817150079834024747336817306968504
9099250336984874138451584018370577971423625112695051299773169022899
7229040496717027871903784524093831394671806781867060194965689084148
5293773301720195963365933146515998951722242703873045396912850906715
7291688981275769936520523118574749335606841419990722590351244374376
6335011862223883687677882743480998816808602121184530102267859106372
6302200795555984268421536908603981679342304677596722882657534759267
3225090136135576136508675803991567708185983167713603101907436059202
9297635383764118414317245694345370879711794488678972247812707492917
6875066811857824080173467015102528416974480779739750989190365328763
3418675919813742909392241724014034709896943039413308093690946306866
4483399779573659065614664741839496047293935670058388656573620838336
3770954272653705593328573224321914712236383673977766010191793793676
8072620099060671439082760601157528947480071063544511258356998266709
2400041764060153451011145187115619143992129959175458258181677343423
8973230339836596091398797806902844055094515230908187067013395254506
0608186215362550980352961764486039679721027263150722944465036066900
1436452620024626746329842000547321785695752704825579594485727949643
4112687639687580003666584435159417489992381666793009443291208974706
1690779223435995136646078338609694467568966620267431339320765711567

0062298686475799756895522475715518188565756735683959947540742502450
5893203486961673346799715286312689965540160667803272402048400072640
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000), (24030273596, -
2513380818745636777866572225956167995323583855151088667430424140326
0877274467780310912191521358734695497744072552293263505853050679689
9874875794491054321599266972389195605550205844130699673222325736116
5566274130095471680739499648736833824200154964244216196166346560145
3721942174051321051148421487966482055643183523408549201640567660100
9960112867121630541736226914990563313988026217020969370804256444710
8921409318412810710190640894813957487973396636261427433782086524649
2178441532394343268287128266634960369184523827927629736447007800951
7803282804305342421554686552444146032817143131053345533290505849486
0657801095413180071654522564996143449054648213378062141344028319163
6669694081816881948894748971953011054039683354920660419257807444784
0402777918855395307270614320832804472170026336239565540018787726801
4031485218180870207137365297375357623866665784156704436200486437157
6379996201134085041870203561644240463114378138989494920304108149474
3095608153591744658771139435140010970676001680527218604881414891537
7749079678431557045037362240813190704257945362766736147633138504132
5635608461648037840040039169565769184831404670789852281400988293611
4073555585642608077837483960967203715234598383279681753091190446803
6292638682144659356312909825615484350311711506815726144952529275728
1732089085640335780493738413581787985198756313679104225391333124078

0348720116361314775079911772193348131398954309380454056546723170832
5028283887421046890272905770523249868627033162929315560250400635796
4933254845559258990178066806723172666262891433707959055971501927180
8464754414719652237475245465745700909307846083189618670148911475857
8414109894036854117072603093463409645769038926746412106821226810613
2315954643542561448968454838617261993925373797324260473171667275597
4671372255776277360004868213040172675419644158145583384857096139428
8465180047441394978009141852735891764850617355067779240336787374332
9840016469502153259821312852626489278210895689589974127049450614945
0033963174392579085647851506699014977339756677343206718023969610297
0426068574599039046370955148798853858169013036633889565909299451552
3971957749836847422198489452927419840093666420359286910217373035391
3758789848300697234588236517165539399441434223173945052105226762305
0136604549032717868966188595015971755352844674686544226606410391205
4401273326923164117323753280177750398896380838408210247590954155071
6059196838130083777206546330737898377078936441060484023391796959504
9133247556507910483170626160891032541761355753352875577658577583943
2738405261642810186902083674477448590723603672584269997844461333285
3003920103265854083360040879228290282727098176329995215397550771569
5353808835088102867836750095531552734471301496533694749129906023634
7384810183055647175267902259695563399169277875152948378631288858707
5278824330249024936760292531049014427050926054759625736338418064729
3263671155351537926052652550052223922069157563488418512404747295574
9585318177479145356174133697408545816432557578219532908225983147003
6840545019202751592654420114019888529162910055554997441303547574839
7848352834255868119685871835711081320472611609667716413104927501041
1850781692587353037627981824)}

Polynomier med grad 300 og 3, som begge har heltallige ekstrema og ens rødder.

$$f(x) = x^{298}\,(x - 23870068200)\,(x - 24083913000)$$

$$g(x) = x(x - 23870068200)\,(x - 24083913000)$$

$f(x)$ har nedenstående heltallige ekstrema. [i]

{(23763861000,
3586257972611825326495376663799123507895271476059285136373159225758
4588068215574223764878048035149222330872809727615562389695493626600
1459172622838643995232854000398040464856079062779386533415446114617
7666983698893802417310981639121344934531910160337037454057187077347
2537166584409191740415520581225384663189966648651850155503551894209
9482384107843522131359394330784578590044078979980875231709316073538
5096712306002025219703214390223054682350140621814154744142521019652
7364451796974784250904447413629555821020564233727836668731161175353
1236214092953682616565529649342075576311391845120823059404669044544
2426701508122478596459201340670294008500150818279946643062821965892
5504950533699362635847058691366447225448413293917086135558215483885
4819262770661205384382336591770998817150079834024747336817306968504
9099250336984874138451584018370577971423625112695051299773169022899
7229040496717027871903784524093831394671806781867060194965689084148
5293773301720195963365933146515998951722242703873045396912850906715
7291688981275769936520523118574749335606841419990722590351244374376
6335011862223883687677882743480998816808602121184530102267859106372
6302200795555984268421536908603981679342304677596722882657534759267
3225090136135576136508675803991567708185983167713603101907436059202
9297635383764118414317245694345370879711794488678972247812707492917
6875066811857824080173467015102528416974480779739750989190365328763
3418675919813742909392241724014034709896943039413308093690946306866
4483399779573659065614664741839496047293935670058388656573620838336
3770954272653705593328573224321914712236383673977766010191793793676
8072620099060671439082760601157528947480071063544511258356998266709
2400041764060153451011145187115619143992129959175458258181677343423
8973230339836596091398797806902844055094515230908187067013395254506
0608186215362550980352961764486039679721027263150722944465036066900
1436452620024626746329842000547321785695752704825579594485727949643

4112687639687580003666584435159417489992381666793009443291208974706
1690779223435995136646078338609694467568966620267431339320765711567
0062298686475799756895522475715518188565756735683959947540742502450
5893203486961673346799715286312689965540160667803272402048400072640
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000),

(24030273596, -
2513380818745636777866572225956167995323583855151088667430424140326
0877274467780310912191521358734695497744072552293263505853050679689
9874875794491054321599266972389195605550205844130699673222325736116
5566274130095471680739499648736833824200154964244216196166346560145
3721942174051321051148421487966482055643183523408549201640567660100
9960112867121630541736226914990563313988026217020969370804256444710
8921409318412810710190640894813957487973396636261427433782086524649
2178441532394343268287128266634960369184523827927629736447007800951
7803282804305342421554686552444146032817143131053345533290505849486
0657801095413180071654522564996143449054648213378062141344028319163
6669694081816881948894748971953011054039683354920660419257807444784
0402777918855395307270614320832804472170026336239565540018787726801
4031485218180870207137365297375357623866665784156704436200486437157
6379996201134085041870203561644240463114378138989494920304108149474
3095608153591744658771139435140010970676001680527218604881414891537
7749079678431557045037362240813190704257945362766736147633138504132
5635608461648037840040039169565769184831404670789852281400988293611

407355558564260807783748396096720371523459838327968175309119044680362926386821446593563129098256154843503117115068157261449525292757281732089085640335780493738413581787985198756313679104225391333124078034872011636131477507991177219334813139895430938045405654672317083250282838874210468902729057705232498686270331629293155602504006357964933254845559258990178066806723172666262891433707959055971501927180846475441471965223747524546574570090930784608318961867014891147585784141098940368541170726030934634096457690389267464121068212268106132315954643542561448968454838617261993925373797324260473171667275597467137225577627736000486821304017267541964415814558338485709613942884651800474413949780091418527358917648506173550677792403367873743329840016469502153259821312852626489278210895689589974127049450614945003396317439257908564785150669901497733975667734320671802396961029704260685745990390463709551487988538581690130366338895659092994515523971957749836847422198489452927419840093666420359286910217373035391375878984830069723458823651716553939944143422317394505210522676230501366045490327178689661885950159717553528446746865442266064103912054401273326923164117323753280177750398896380838408210247590954155071605919683813008377720654633073789837707893644106048402339179695950491332475565079104831706261608910325417613557533528755776585775839432738405261642810186902083674477448590723603672584269997844461333285300392010326585408336004087922829028272709817632999521539755077156953538088350881028678367500955315527344713014965336947491299060236347384810183055647175267902259695563399169277875152948378631288858707527882433024902493676029253104901442705092605475962573633841806472932636711553515379260526525500522239220691575634884185124047472955749585318177479145356174133697408545816432557578219532908225983147003684054501920275159265442011401988852916291005555499744130354757483978483528342558681196858718357110813204726116096677164131049275010411850781692587353037627981824)}

Polynomier med grad 500 og 3, som begge har heltallige ekstrema og ens rødder.[i]

$f(x) = x^{498}\,(x - 185505747000)\,(x - 186499755000)$

$g(x) = x(x - 185505747000)\,(x - 186499755000)$

$f(x)$ har nedenstående heltallige ekstrema.

{(185010735000,
8542532623460126318897347280454755556388609524465581583211781284605
2291125958351476022573545337024882847203277775636140975853606101231
3686715041629152177499089390469202850489894778084347255242579845153
6286365902250382594899309783889919209521223599699450044245656233431
9247615808203955208428410767475275776376690849427564482980021490679
3365302451107340003943748016062404592660813551321121468522527969299
9644999548793145628451909781072733150824536039634998025583248851626
5416749882896374496998780974413667015733739681226212404666810676543
5756686028824985983941028395349070395105658496186670221244504415854
4726563551865565392829851011949653115742949261978855067898662860864
4493582180829773057849302143941073876896174010508236891027131397602
5730945889328015747200155723538673573278728717460523617562232423689
5329563873855610802608649037064609642224821190252231203144388813164
3650397427078119410228361054321175367703368043277733214290081208419
5848246324918281337174567242450974809678582792464099133959818586919
9603996806599828628616879949524700599314892310706528098381169177612
8674892005672572416474589279606032718167900456024734106035962524944
5084058927174194561454193835473682509277503074256586439725397801814
8529144668285067305589121032633057709730072069799753094459003744082
1219116360414852789481411076224469914506168811095107380657304268088
7941933482646559860262862548542074403186890742128740011159834730631
6769773660620814680565327385293076005151178459207742959926340312092
3392865770441568008810129068410598393439476172098116585167991835853
7007416565546257658815257937955073909099291822968166256673593420881
8536786252081663971933351131397168411673281247741658883118899816939
6522124989350718728119029975949984654362765438410716328888462679872
7997346052722367128840994940373728340319943795440982894434353726024
8687160952745989735065187499622160635723083791034311290503705963164
8464261129324226071958927738048558350234696358694230019553972186481

8341909664287077486903446163949999292200920898298982251563459943250
0287249831590626187785716557515658913836327694850664582492748356038
8025373766286314196791621701265237365429690119256670929812128672853
4075983124393937191499162098038189579540567691630543490633791344689
3710877352654221535875221187529615981638056725365640015971969444833
3811533642853681461894035522268158039382317007489221240679456601286
7621606726373038146830853852520267657427438994154138972482226494899
6278790080113922888355195978152989161155799820292110937144803785810
4679716858902734425871888582730801750073396320967008238362484021175
4591739911428257548424487397614408702874860739181954727132494996642
8324162367342277684420592640451677414548553717896724752297997822857
8083986761842173907883813324213881204703429414789144601616589695227
8135197832551416322670185006963792402666274890310156416217858054127
3776335072736623143644742026129116767253165499215271746028413641690
3754135236110156691772749875034898204413924410498925899100561288021
2376893011365140783613210958202763186036057339600463384287402024334
2390820846039173206022561996528529876742754195114084324658312019698
7569497291225103201011085414155733976012780406219399437379329626191
6778762087650267047763842322732974844583171059151563203280026884711
7054367036816053391936416146527408451360572577484123236225046990927
1874728122470912968678200755274272111795258312591679413565447151555
3668941960687928029270603388356670310483634129921341837579522927814
7395438803057876449880721673448497085142167619927039766787363520858
4045955718759883495312542324012432443951950953032724578410857295463
3112815971154840202628771737358948353902043066498718070895731361844
2661036054056480760489206139246567120362853110952863139573111581407
9200419454989924397141363966943417283861857037676309979901095008676
1695997735864893840141455277991193571081516478522702172652201139901
2252358724018241855717549161566172937812196999379937296379913864530
5756807429657757308911611616345265671241132786963237955997699991544
1668948176497192808899319558563741837526977102829120828490634695672
9927002015392022042624251678571586392604436580944530925875484350315
3031392116645292844623327255249023437500000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000

0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0), (186250755996, -
5986667744753096662279748930956130640763466150133166466916991150979
7043722396050446670091175581922199507018470818217083191988752870124
9454776814907215057341399869255718807322354392375119830405591393226
0978697243788495336895001122172099726139488085364642744961806623511
2996726214388191655414476058549601568535308633812874206687824598164
3029143137493794165525263779436437834022947365230815706408939219101
3015149261267279534441736235903307688272100067416470960589972333404
8406829219354666779912201025251967358479932117583431527155932249011
8516525055390196610010278720898170615511285531625966212915084016190
1709283158844689118338605949463887027681667674431969075160603205419
0037152102887731984277104483629698861028715893185789385118080472976
8623271078754931876047186925628970680640238749924854219311722135214
9516039242460445162944028771483591727581252374348027597585090635780
4676626515855833915290454835744170272676282892384469564304203320897
0290509155261966348459636561174695538459352867308889354173109408380
0613903838067080131919051529544157049829578818123953770753678758973

5210478864123805863322029255881849788474758427225581996051996274000
2719928666304762300755353447288452310122591248344307984029515290 15
2139631183057723751532479710558010134944546463289140874529461672501
4432212080151028071463176094463502579547159710335699783124950824723
4473715687877757771709948754641101868414846081000505403313282859812
0257433651723251297045786669325616386374621349002031718669455253746
6316940629763540287860760470113878675149849852658170915607034908456
8300885773709147787270246017038557881019175023667381245803287912586
8965223882847475436684692417711209760968805874511808015090891909596
8315279982793846148750774199928206197065815890040626898160648315063
4194272101728637606186657311250546734162540742393436799658339715573
9967448617634512620763911456974108636261158118466774733212142917317
7555527301074304399162671962712726959872315473092581548964986130015
8308685662588927789070468250568371376543533963990137855631525490923
7167967512951386362779082721474063184326990493233487826078024352605
1015018849614700894327016354338416686424468075792142146127643689438
0451083133641938684344017837750286080066103513196071591550172235163
0067891003879080331107161165847739793687768326811238198021233859365
8537449698035818629064255446112104577951799126841765933615904241228
9113401735467252092818134188501957280821685131242250236965212270998
6997278462288501256608081090797462002300103032052851756034641094872
1233917783322425777112051530217137970903901873465996092009543383656
6264873908557451892256431063610442555103280628924501463931352625265
5333976046280758612186534607603988049373743184363391543966689222641
1662316952824021528286357974251760901887423496524721967444253939337
7452537384632641538868377639005023691744677623383759959792693494968
6284103650756101097708197206166423598329600827029003402887248474106
8094217593819478690862740070004919496803921473725809670030772670842
2656368210139927113844475905303167642056323643677617911563147518824
9315558217624588753326685516123622031910591629854724329836506408564
6781523294868725781198399492795576774008161720936443600234979746458
5297728908599800538664204375045890075462916509214623339429170735233
2704172500071984472016473652851088286583712024915813809859710697001
7541697009911979479551687949925247211934298626773919057993678745900
5964138458820215293448109078754593446187676234457695156925711716146
8492952026945999896128536593686311338111962869597912966218700121911

8245595558418446994062403520145951720104869838356568245367356501177
2460712738144326326764414749546053639124179262026624632736749249864
5676545864100767759470911383819480822623482359227673180634683786158
5381461080961430731004740205809925847357552025556492009172934635319
0331683428379553417771089046555193590590435143116798725810298016539
0766858075149078288027561046357667536832896984665748093563860042950
0043725074334813486974667268920653546644688108115018939676538275574
7009761766531916969891577835503924288597834934069477302516053329248
7154694741502678105044477111112065211078613675668457574707733384081
1266874123088284166219614338063424435976841347549645138932225853078
9675510971810223571760425352229918277907908761153462571803537395133
1765644765544331154993823583731892788349077023164670875386216408372
3749710769756422599569421945888795211167710911398240360953037900999
0306279496952002461718642073392849307746371225799096836611607489410
9589034178103600941023554413095334738406455129202257932526328673009
7350434117980778239079481769420979530623527649652285221490270550689
5044273174816231408911691440003222765162511188567863370394094496135
0788284531619090041975274799656551723922923872703302683474184370122
3362340725883478543536435072392742246017812653862611098155505247300
0055511928829258239699509725230401772977409065866936233225364932890
2104285531519793504931013247982845778516978441602189612508255735056
5653850809036783153374671214940248198972013983175866372880254761550
9537204172618404043757137184776168401357103062306068358855284776912
6814685125888362881302936426528772162846223813749863315004018879554
3105054506681128654279347617847733498604792159082979359079538981387
2974755815562508995992161036594418123436647479929235630551952131567
2063541608798161218479328068535894887795463368228308632248718457746
5327737859704285427182892608777006253859526417970303658250961633263
8667942046668556226149237377102920260958804367448961601458934756843
8014669961473117314605429586282391723651605927547459119696678434509
5977146526220196599154377213913863630134340001969624472179642517757
3427342281423337368208256851419675969278120086141236788143239452426
24)}

ii https://maa.org/sites/default/files/0025570x28304.di021116.02p0130a.pdf

iii $\{\{p = p,\ q = (-2n t^2 + 2n w^2 + t^2 - w^2 + \mathrm{sqrt}(4n^2 t^4 - 8n^2 t^2 w^2 + 4n^2 w^4 - 4n t^4 + 8n t^2 w^2 - 4n w^4 + t^4 + 8t^3 w + 18t^2 w^2 + 8t w^3 + w^4))\, p / (2t^2 + 4t w),\ z = (12n^2 t^2 - 12n^2 w^2 - 12n t^2 + 12n w^2 - 3t^2 - 12t w - 3w^2 + (6n - 3)\, \mathrm{sqrt}(4n^2 t^4 - 8n^2 t^2 w^2 + 4n^2 w^4 - 4n t^4 + 8n t^2 w^2 - 4n w^4 + t^4 + 8t^3 w + 18t^2 w^2 + 8t w^3 + w^4))\, s / ((16n^3 - 16n^2)\, p^2)\},\ \{p = p,\ q = (-2n t^2 + 2n w^2 + t^2 - w^2 - \mathrm{sqrt}(4n^2 t^4 - 8n^2 t^2 w^2 + 4n^2 w^4 - 4n t^4 + 8n t^2 w^2 - 4n w^4 + t^4 + 8t^3 w + 18t^2 w^2 + 8t w^3 + w^4))\, p / (2t^2 + 4t w),\ z = (12n^2 t^2 - 12n^2 w^2 - 12n t^2 + 12n w^2 - 3t^2 - 12t w - 3w^2 + (-6n + 3)\, \mathrm{sqrt}(4n^2 t^4 - 8n^2 t^2 w^2 + 4n^2 w^4 - 4n t^4 + 8n t^2 w^2 - 4n w^4 + t^4 + 8t^3 w + 18t^2 w^2 + 8t w^3 + w^4))\, s / ((16n^3 - 16n^2)\, p^2)\}\}$

iv

18	-2 n (2n+1)² + 2n (2n-3)² + (2n+1)² - (2n-3)²+ 2(20n^2-20n+ 1) $\rightarrow\ \mathbf{8\,n^2 - 8\,n - 6}$

v

33	12n² (2n+1)² - 12n² (2n-3)² - 12n (2n+1)² + 12n (2n-3)² - 3(2n+1)² - 3(2n-3)² - 12(2n+1) (2n-3) $\rightarrow\ \mathbf{192\,n^3 - 360\,n^2 + 168\,n + 6}$
34	2*((20*n^2+1-20*n))*(6n-3) $\rightarrow\ \mathbf{240\,n^3 - 360\,n^2 + 132\,n - 6}$
35	240n³ - 360n² + 132n - 6 +(192n³ - 360n² + 168n + 6) $\rightarrow\ \mathbf{432\,n^3 - 720\,n^2 + 300\,n}$

---

vi

36

(24n² - 8n - 10)^2*(16n^3-16n^2)/(432n³ - 720n² + 300n)

$$\approx \frac{64\,n^4 - 48\,n^2 - 16\,n}{3}$$

vii

T

1

3*(2n*(24n² - 8n - 10)^2+2n*(2n-1)*(8n² - 8n - 6)*(24n² - 8n - 10))

$$\rightarrow\ 2304\,n^6 - 768\,n^5 - 2688\,n^4 + 912\,n^2 + 240\,n$$

2

3*(2n*(8n² - 8n - 6)^2+2n*(2n-1)*(8n² - 8n - 6)*(24n² - 8n - 10))

$$\rightarrow\ 2304\,n^6 - 3840\,n^5 - 1152\,n^4 + 2304\,n^3 + 528\,n^2 - 144\,n$$

viii

-2 n t² + 2n w² + t² - w²

$$\approx\ -2\,n\,t^2 + 2\,n\,w^2 + t^2 - w^2$$

-2 n (2n+1)² + 2n (2n-3)² + (2n+1)² - (2n-3)²

$$\approx\ -32\,n^2 + 32\,n - 8$$

-2 n (2n+1)² + 2n (2n-3)² + (2n+1)² - (2n-3)²+ 2(20n^2-20n+ 1)

$$\rightarrow\ 8\,n^2 - 8\,n - 6$$

-32 n² + 32n - 8- (2(20n^2-20n+ 1))

$$\rightarrow\ -72\,n^2 + 72\,n - 10$$

ix

35	12n² t² - 12n² w² - 12n t² + 12n w² - 3t² - 12t w - 3w² $\rightarrow$ $\mathbf{12\,n^2\,t^2 - 12\,n^2\,w^2 - 12\,n\,t^2 + 12\,n\,w^2 - 3\,t^2 - 3\,w^2 - 12\,t\,w}$
36	12n² (2n+1)² - 12n² (2n-3)² - 12n (2n+1)² + 12n (2n-3)² - 3(2n+1)² - 3(2n-3)² - 12(2n+1) (2n-3) $\rightarrow$ $\mathbf{192\,n^3 - 360\,n^2 + 168\,n + 6}$
37	2*((20*n^2+1-20*n))*(6n-3) $\rightarrow$ $\mathbf{240\,n^3 - 360\,n^2 + 132\,n - 6}$
38	192n³ - 360n² + 168n + 6-(240n³ - 360n² + 132n - 6) $\rightarrow$ $\mathbf{-48\,n^3 + 36\,n + 12}$

x $f'(x) = x^{2n-3}(2nx^2 + bx + c)$, med

$b = (2n-1)n(-4608n^5 + 4608n^4 + 3840n^3 - 2304n^2 - 1440n - 96\,)$ og

$c = n^2(2n-2)(5308416n^{10} - 10616832n^9 - 5898240n^8 + 16515072n^7 + 4644864n^6$

$-9879552n^5 - 3280896n^4 + 2211840n^3 + 1034496n^2 - 4608n - 34560)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 2nx^2 + bx + c = 0$

$d = 96(80n^6 - 80n^5 - 56n^4 + 40n^3 + 17n^2 - n)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$x = 2304n^6 - 5376n^5 + 1152n^4 + 3456n^3 - 816n^2 - 720n$

$\vee\, x = 2304n^6 - 1536n^5 - 2688n^4 + 768n^3 + 1104n^2 + 96n - 48$

(-(n (2n - 1) (-4608 n⁵ + 4608n⁴ + 3840n³ - 2304n² - 1440n - 96))+96(80n⁶ - 80n⁵ - 56n⁴ + 40n³ + 17n² - n))/(4*n) $\rightarrow$ $\mathbf{2304\,n^6 - 1536\,n^5 - 2688\,n^4 + 768\,n^3 + 1104\,n^2 + 96\,n - 48}$
(-(n (2n - 1) (-4608 n⁵ + 4608n⁴ + 3840n³ - 2304n² - 1440n - 96))-96(80n⁶ - 80n⁵ - 56n⁴ + 40n³ + 17n² - n))/(4*n) $\rightarrow$ $\mathbf{2304\,n^6 - 5376\,n^5 + 1152\,n^4 + 3456\,n^3 - 816\,n^2 - 720\,n}$

Desuden fås

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 768n^6 - 768n^5 - 1152n^4 + 384n^3 + 624n^2 + 144n$

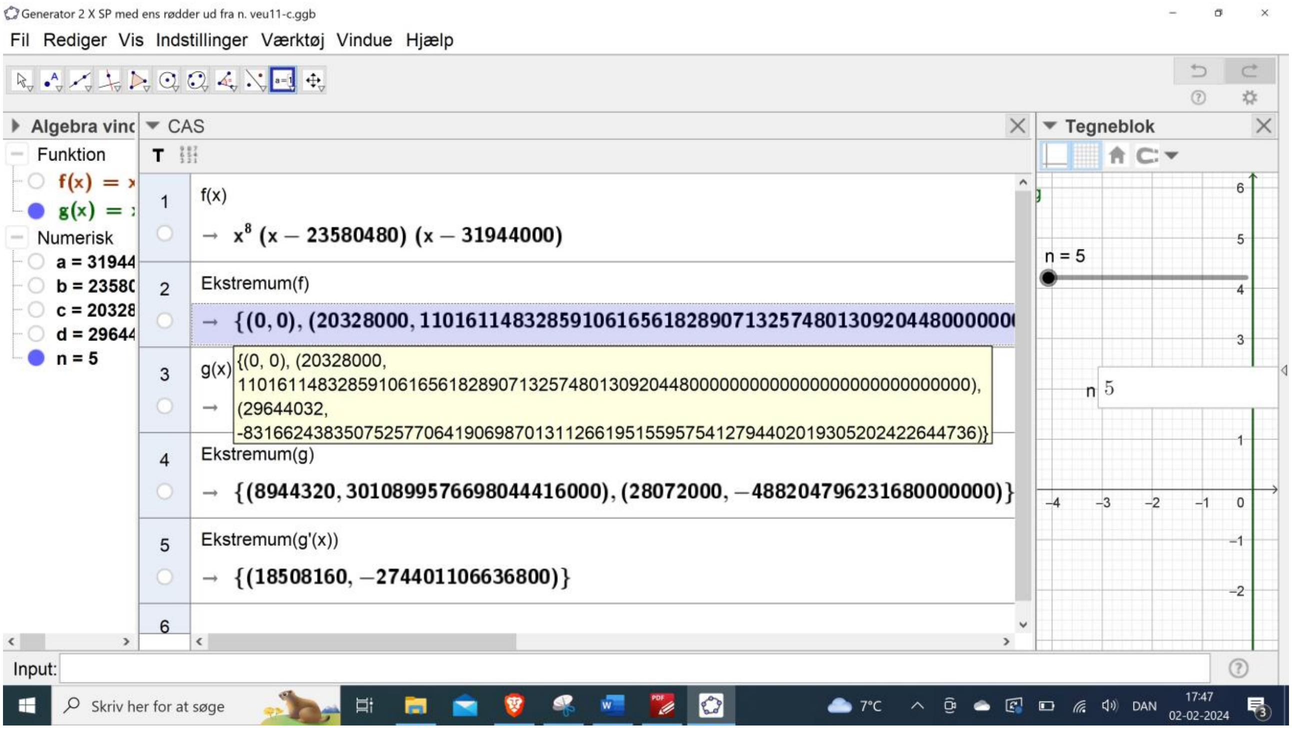
$\vee\, x = 2304n^6 - 2304n^5 - 1408n^4 + 1152n^3 + 336n^2 - 80n$

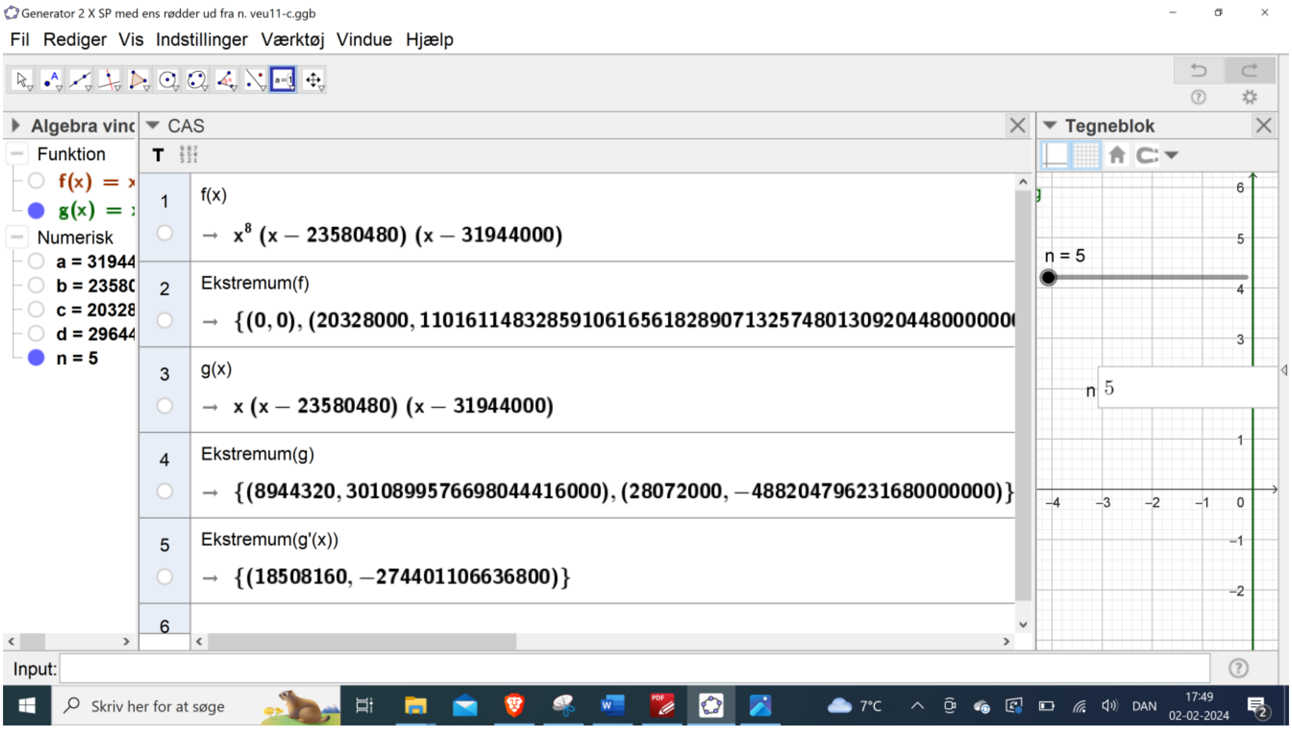
31	x(x-(2304n⁶ - 768n⁵ - 2688n⁴ + 912n² + 240n))(x-(2304n⁶ - 3840n⁵ - 1152n⁴ + 2304n³ + 528n² - 144n)) $\rightarrow\ x\left(-2304\,n^6+768\,n^5+2688\,n^4-912\,n^2-240\,n+x\right)\left(-2304\,n^6+3840\,n^5+1152\,n^4-2304\,n^3-528\,n^2+144\,n+x\right)$
32	$31 Afledede: $\left(-2304\,n^6+768\,n^5+2688\,n^4-912\,n^2-240\,n+x\right)\left(-2304\,n^6+3840\,n^5+1152\,n^4-2304\,n^3-528\,n^2+144\,n+x\right)+x\,(-23$
33	0=(-2304 n⁶ + 768n⁵ + 2688n⁴ - 912n² - 240n + x) (-2304 n⁶ + 3840n⁵ + 1152n⁴ - 2304n³ - 528n² + 144n + x) + x (-2304 n⁶ + 768n⁵ + 2688n⁴ - 912n² - 240n + x) + x (-230 Beregn: $\{x=768\,n^6-768\,n^5-1152\,n^4+384\,n^3+624\,n^2+144\,n, x=2304\,n^6-2304\,n^5-1408\,n^4+1152\,n^3+336\,n^2-80\,n\}$

xi

12	x(x-(-20736 n⁶ + 69120n⁵ - 77184n⁴ + 32640n³ - 3600n²))(x-(-20736 n⁶ + 41472n⁵ - 17280n⁴ - 9600n³ + 6000n²)) $\rightarrow\ x\left(20736\,n^6-41472\,n^5+17280\,n^4+9600\,n^3-6000\,n^2+x\right)\left(20736\,n^6-69120\,n^5+77184\,n^4-32640\,n^3+3600\,n^2+x\right)$
13	$12 Afledede: $\left(20736\,n^6-41472\,n^5+17280\,n^4+9600\,n^3-6000\,n^2+x\right)\left(20736\,n^6-69120\,n^5+77184\,n^4-32640\,n^3+3600\,n^2+x\right)+x\,(207$
14	0 = 429981696n¹² - 2293235712n¹¹ + 4825350144n¹⁰ - 4873125888n⁹ + 1974067200n⁸ + 442368000n⁷ + 82944n⁶ x - 714240000n⁶ - 221184n⁵ x + 230400000n⁵ + 188 Beregn: $\{x=-20736\,n^6+55296\,n^5-51840\,n^4+19200\,n^3-2000\,n^2, x=-6912\,n^6+18432\,n^5-11136\,n^4-3840\,n^3+3600\,n^2\}$

xii





Polynomier med ens rødder og heltallige ekstremumspunkter.
Heine Strømdahl, 03-02-2024.