Gegeben sind die drei Punkte A,B und P, mit

$$A = (2|3|1)$$

$$B = (-2|-2|1)$$

$$P = (2|-2|5)$$

Die Ortsvektoren für die drei Punkte lege ich fest, mit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | A:=(2,3,1) | $\rightarrow$ **A** $:=$ **(2, 3, 1)** |
| 2 | B:=(-2,-2,-1) | $\rightarrow$ **B** $:=$ **(−2, −2, −1)** |
| 3 | P:=(2,-2,5) | $\rightarrow$ **P** $:=$ **(2, −2, 5)** |
| 4 | a:=Vektor(A) | $\rightarrow \mathbf{a} := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ |
| 5 | b:=Vektor(B) | $\rightarrow \mathbf{b} := \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ |
| 6 | p:=Vektor(P) | $\rightarrow \mathbf{p} := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ |

| 7 | r:=a+λ*(b-a) |
|---|---|
| | $\rightarrow\ \mathbf{r} := \begin{pmatrix} -4\lambda+2 \\ -5\lambda+3 \\ -2\lambda+1 \end{pmatrix}$ |

Der Punkt R soll auf der Geraden durch die Punkte A und B liegen.

Die Gerade g wird in der Parameterform in folgendermaßen beschrieben:

$$g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot (\vec{b} - \vec{a})$$

Dabei ist $\vec{a}$ der Ortsvektor des Punktes $A$ und somit auch ein Ortsvektor der Geraden $g$. Der Differenzvektor $\vec{b} - \vec{a}$ ist der Richtungsvektor der Geraden $g$.

Wenn der Punkt $R$ mit dem Ortsvektor $\vec{r}$ auf der Geraden liegen soll, dann muss er auch die Parametergleichung erfüllen:

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda \cdot (\vec{b} - \vec{a})$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -4\lambda + 2 \\ -5\lambda + 3 \\ -2\lambda + 1 \end{pmatrix}$$

Der Differenzvektor $\vec{d} = \vec{p} - \vec{r}$ verbindet die beiden Punkte P und R. Berechnet man den Betrag $|\vec{d}|$ des Differenzvektors, so berechnet man auch den Abstand der beiden Punkte P und R.

$$\vec{d} = \vec{p} - \vec{r} = \begin{pmatrix} 4\lambda \\ 5\lambda - 5 \\ 2\lambda + 4 \end{pmatrix}$$

| | |
|---|---|
| 8 | d:=p-r<br>$\rightarrow \mathbf{d} := \begin{pmatrix} 4\lambda \\ 5\lambda - 5 \\ 2\lambda + 4 \end{pmatrix}$ |

*Die kürzeste Verbindung zwischen Punkten P und R ist dann erreicht, wenn der Verbindungsvektor $\vec{d}$ senkrecht zur Geraden ist. Das ist dann der Fall, wenn $\vec{d}$ senkrecht zum Richtungsvektor $\vec{b}-\vec{a}$ der Geraden ist.*

*Zwei Vektoren sind senkrecht zueinander, wenn das Skalarprodukt 0 ist.*

$$\vec{d}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$$

$$\begin{pmatrix}4\lambda\\5\lambda-5\\2\lambda+4\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}-2\\-2\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\right)=0$$

$$\begin{pmatrix}4\lambda\\5\lambda-5\\2\lambda+4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\-5\\-2\end{pmatrix}=0$$

$$-45\lambda+17=0|-17$$

$$-45\lambda=-17|\div(-45)$$

$$\lambda=\frac{17}{45}$$

*Die kürzeste Verbindung in diesem Fall ist dann erreicht, wenn*

$$\lambda=\frac{17}{45}$$

*gilt.*

| | |
|---|---|
| 9 | b-a<br>$\rightarrow \begin{pmatrix}-4\\-5\\-2\end{pmatrix}$ |
| 10 | d*(b-a)=0<br>$\rightarrow -45\,\lambda+17=0$ |
| 11 | $10 - 17<br>$\rightarrow -45\,\lambda=-17$ |
| 12 | $11 / -45<br>$\rightarrow \lambda=\frac{17}{45}$ |

Jetzt kann man den Parameter $\lambda = \frac{17}{45}$ in den Differenzvektor $\vec{d} = \begin{pmatrix} 4\lambda \\ 5\lambda - 5 \\ 2\lambda + 4 \end{pmatrix}$ einsetzen:

$$\begin{pmatrix} 4 \cdot \frac{17}{45} \\ 5 \cdot \frac{17}{45} - 4 \\ 2 \cdot \frac{17}{45} + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{68}{45} \\ -\frac{28}{9} \\ \frac{214}{45} \end{pmatrix}$$

| | |
|---|---|
| 13 | Ersetze(d, $12) <br> ✓ $\left(4 \cdot \frac{17}{45}, 5 \cdot \frac{17}{45} - 5, 2 \cdot \frac{17}{45} + 4\right)$ |
| 14 | $13 <br> → $\left(\frac{68}{45}, \frac{-28}{9}, \frac{214}{45}\right)$ |
| 15 | sqrt($14²) <br> → $\frac{2}{15}\sqrt{1945}$ |
| 16 | $15 <br> ≈ **5.8803** |

Der Betrag dieses Vektors ist der Abstand des Punktes P von der Geraden g:

$$|\vec{d}| = \left|\begin{pmatrix} \frac{68}{45} \\ -\frac{28}{9} \\ \frac{214}{45} \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\left(\frac{68}{45}\right)^2 + \left(-\frac{28}{9}\right)^2 + \left(\frac{214}{45}\right)^2} = \frac{2}{15} \cdot \sqrt{1945} \approx 5{,}8803$$