Teorema da solução de sistemas lineares

Ivan Alisson Tavares Ferreira

12 de Setembro de 2018

Resumo

Um sistema linear pode ser possível, isto é, ter solução, ou impossível, quando não há solução. O teorema a seguir explicará os detalhes

1 Introdução

Toda equação linear é da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$
Nessa equação,
$x_1, x_2, ..., x_n$ são as incógnitas
$a_1, a_2, ..., a_n$ são os coeficientes
b é o termo independente

1.1 Equação linear simples

São as equações que possuem apenas uma incógnita.
Exemplo $\boxed{3x = 15}$

1.2 Equação linear homogênea

São as equações que possuem o termo independente nulo, ou seja $b = 0$. Nesse tipo de equação se têm a solução trivial.
Exemplo: $\boxed{x+y-z = 0}$ logo, $S = \{0, 0, 0\}$

1.3 Equação linear nula

São as equações que tanto os coeficientes quanto o termo independente são nulos.
Exemplo $\boxed{0x+0y+0z = 0}$

1.4 Equação linear degenerada

Diz-se que uma equação é degenerada se tem a forma

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b$$

(1)

Ou seja, todos os seus coeficientes são nulos.

2 Resultado principal

Teorema 2.1. *Dado um sistema de equações lineares do tipo* $S_1 = \begin{cases} a_1x + a_2y = b_1 \\ a_1'x + a_2'y = b_1' \end{cases}$ *, se tem que o sistema é possível e determinado, se e somente se,* $M = \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 \\ a_1' & a_2' \end{matrix} \right\|$ *e* $D = det(M) \neq 0$

Demonstração: Seja (x, y) solução de S_1, pela regra de Cramer, temos

$$x = \frac{D_x}{D} \text{ e } y = \frac{D_y}{D}$$

Logo, existe (x, y) que satisfaz S_1, pois $D \neq 0$.
Observe que $x.D = D_x$, quando $D = 0$ e $D_x \neq 0$ S_1 não tem solução e quando $D = 0$ com $D_x = 0$ o sistema tem infinitas soluções, o mesmo vale para y. Concluimos que um sistema pode ser:

1. Possível e determinado

2. Possível e indeterminado

3. Impossível.

◇

3 Aplicações

Alcuino de York nasceu na Grã Bretanha na cidade de Northumbria em 735 e morreu dia 19 de Maio de 804 em Tours, na França. Estudou na Itália e também na escola catedral de York, onde ensinou durante cerca de 15 anos. Foi lá que criou uma das melhores bibliotecas da Europa de então e transformou a escola em um dos maiores centros de saber. É atribuída a Alcuino a autoria de diversos problemas Matemáticos para jovens, intitulados como Propositiones ad Acuendos Juvenes (Problemas para Estimular os Jovens). Estes 53 problemas e as suas soluções nos dão uma ideia do estado da educação matemática durante o reinado de Carlos Magno. Vários dos 53 problemas de Alcuino podem ser resolvidos usando o Teorema 2.1. Vejamos o problema 16 dos 53. Um clássio

Problema 16: Dois homens conduziam bois ao longo de uma estrada, quando um disse ao outro: "Dá-me dois bois e eu terei tantos bois como tu". Após a transacção, o outro disse: "Dá-me dois bois e eu terei o dobro dos que tu tens". Quantos bois havia e quantos é que cada homem tinha?
Resolução:
Modelando, temos Homem 1 $= x$ e Homem 2 $= y$

$$x+2=y-2 \Rightarrow x-y=-4 \text{ e } 2(x+2-2)=y-2+2 \Rightarrow 2x-y=0$$

Resolvendo o sistema $\begin{matrix} x-y=-4 \\ 2x-y=0 \end{matrix}$ segundo o Teorema (2.1), $x=\frac{D_x}{D}=4$ e $y=\frac{D_y}{D}=8$

Conclusão, o homem 1 tinha quatro bois e o segundo homem tinha oito bois, doze cabeças de gado ao total.

4 Bibliografia

[1] Poole, David. Álgebra linear, 2004.
[2] https://www.infopedia.pt/alcuino