A sorozatra

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 1, \tag{1}$$

$$a_1 := 1, \quad a_2 := 3. \tag{2}$$

Mi az első N tag összege?

1. Megoldás. „Vegyük észre”, hogy a sorozatra $a_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ (teljes indukcióval igazolható). Ebből az első N tag összege rögtön jön:

$$S_N = \frac{1}{2}\Big(\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + \frac{N(N+1)}{2}\Big).$$

Igen, a „vegyük észre” az izgalmas. Namost. Az (1) szerinti lineáris rekurziók erősen analógok a (lineáris) differenciálegyenletekkel. Alapvetően azért, mert mindkettő lineáris algebrai kérdés, az $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{y_0}$ egyenletről van szó, ahol $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ a „vektorok” (konkrétan sorozatok, ill. függények), $\mathbf{A}$ pedig egy lineáris operátor (mátrix, illetve differenciáloperátor). A megoldások szerkezete is hasonló (az operátor magterének affin eltoltja). Ezt most direkt írtam így, de könnyű emberi nyelvre is lefordítani, egy elég jó megvalósítása ennek a Vilenkin könyvében olvasható.

Tehát akkor diff.egy., ezekről sokat tanultunk. Először kerestem a „homogén egyenlet”

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0, \tag{1'}$$

megoldásait p^n alakban (keressünk mértani sorozat megoldást); ez a $p^2 - 2p + 1 = 0$ egyenletre vezet, $p = 1$. Igen ám, de két megoldás kellene: tanultuk, ill. Vilenkin is írja, hogy a másik megoldás $n \cdot p^n$. (Gyors ellenőrzés, és tényleg, szóval eddig jó.)

Tehát a „homogén egyenlet” (azaz (1′)) általános megoldása $b_n = A \cdot n + B \cdot 1$ (ezt hívja a linalg. magtérnek).

Az „inhomogén egyenlet” megoldását próbafüggvény módszerrel keresem (ez kevésbé általános, mint a Leindler-jegyzetből tanult konstans-variáció, de sokszor egyszerűbb; általában a „mérnökös” jegyzetekben, könyvekben van meg.) A jobboldal 1, de ez „rezonál” az ált. mo.-okkal, akkor n-nel kell szorozni; az n is rezonál, akkor n^2. Tehát keressük (1) megoldásait $A \cdot n^2 + B \cdot n + C$ alakban. Kis számolás, a B-s és C-s részek kiesnek (természetesen), $A = \frac{1}{2}$ adódik.

Tehát az (1) egyenletet a $b_n := \frac{1}{2}n^2 + Bn + C$ alakú sorozatok elégítik ki. Ideje behelyettesíteni (2)-be is (diff.egy.-nél ezt hívnánk kezdeti értéknek), ebből

$$\frac{1}{2} + B + C = 1, \quad \frac{1}{2} \cdot 4 + 2B + C = 3,$$

tehát $B = \frac{1}{2}$, $C = 0$.

Szóval így „vettem észre” a zárt képletet. De azért érdemes lapozni is.

2. Megoldás. Utólag okosabb az ember. Csináljuk máshogy.

$$\begin{aligned} a_3 - a_2 &= a_2 - a_1 + 1 \\ a_4 - a_3 &= a_3 - a_2 + 1 \\ a_5 - a_4 &= a_4 - a_3 + 1 \\ &\vdots \\ a_n - a_{n-1} &= a_{n-1} - a_{n-2} + 1, \end{aligned}$$

ezeket összeadva (egy csomó tag kiesik)

$$a_n - a_2 = a_{n-1} - a_1 + n - 2,$$

$$a_n - a_{n-1} = n.$$

Pólya szerint „módszer az a fogás, amit kétszer alkalmazunk”, akkor csináljuk még egyszer:

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= 2 \\ a_3 - a_2 &= 3 \\ a_4 - a_3 &= 4 \\ &\vdots \\ a_n - a_{n-1} &= n, \end{aligned}$$

és itt is kiesik egy csomó tag, tehát

$$a_n - 1 = 2 + 3 + \cdots + n \implies a_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ezzel még a teljes indukciót is megúsztuk, egyebekről nem is beszélve.

(Egyébként azért vettem elő még egyszer, hogy elsőrendű diff.egy. analógiát keressek, mert az egyszerűbb lenne. De ez ıgy már elég egyszerű.)

okt. 19, NZoli