Verloop exponentiële en logaritmische functies

www.karelappeltans.be

October 4, 2024

Contents

1 herhaling

1.1 logaritmen

1.1.1 begripsvorming

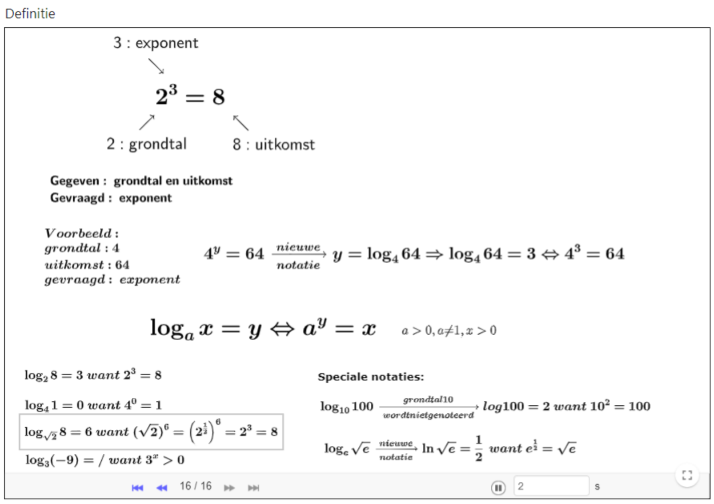


Figure 1: https://www.geogebra.org/m/GbHdUfsF

1.1.2 rekenregels

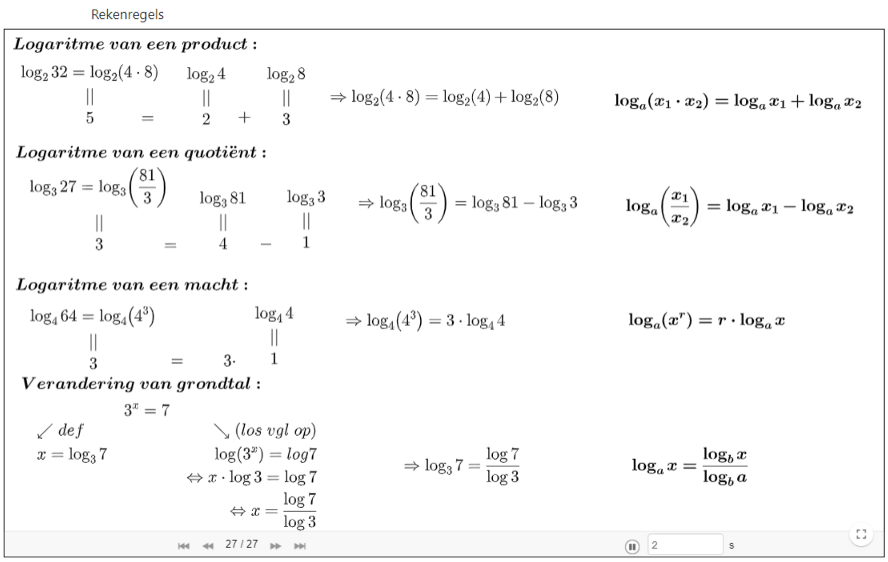


Figure 2: https://www.geogebra.org/m/GbHdUfsF

1.2 grafieken exponentiële en logaritmische functies en hun verband

1.2.1 Exponentiële functies

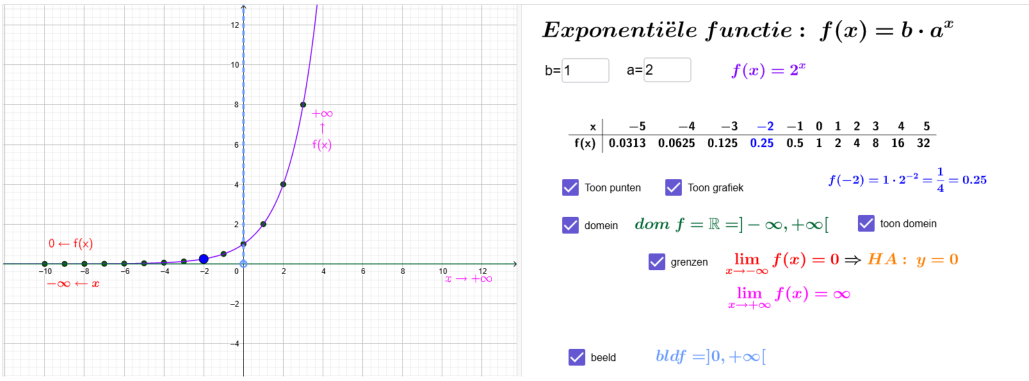


Figure 3: https://www.geogebra.org/m/Rb6qHp3z

1.2.2 Logaritmische functies

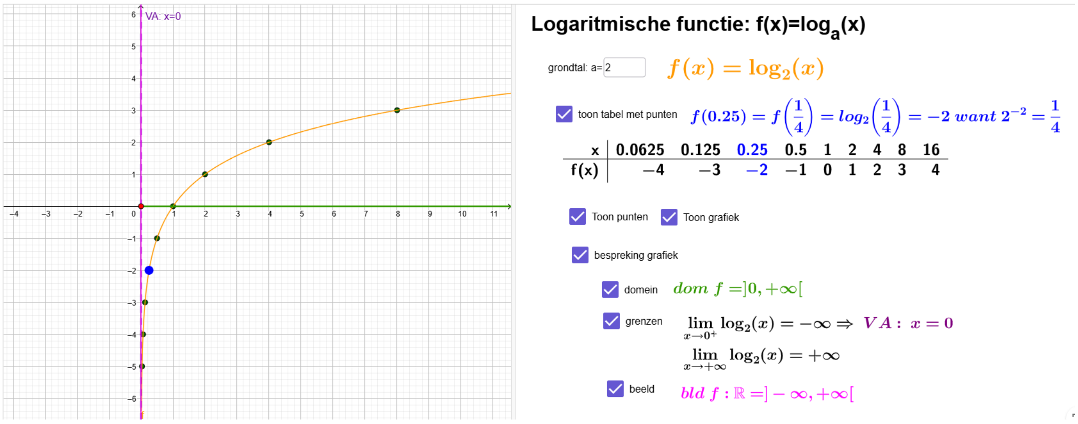


Figure 4: https://www.geogebra.org/m/ReNNrmut

1.2.3 Elkaars inverse

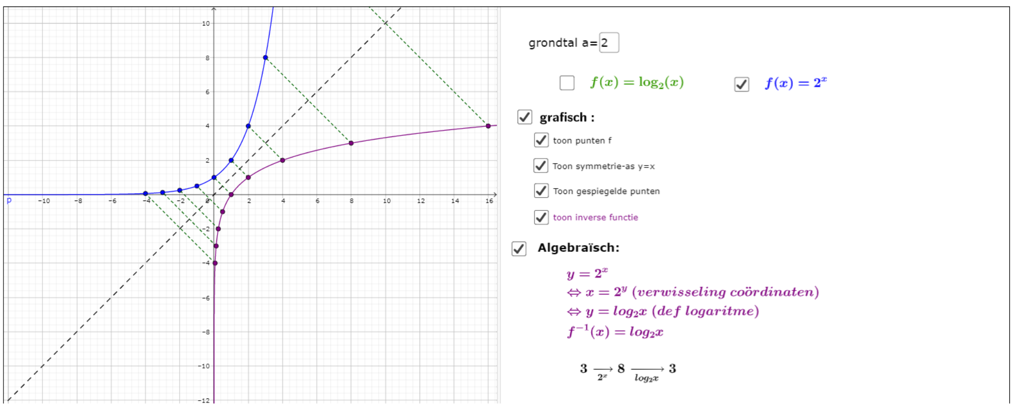


Figure 5: https://www.geogebra.org/m/YYevVAPy

1.3 definitie afgeleide

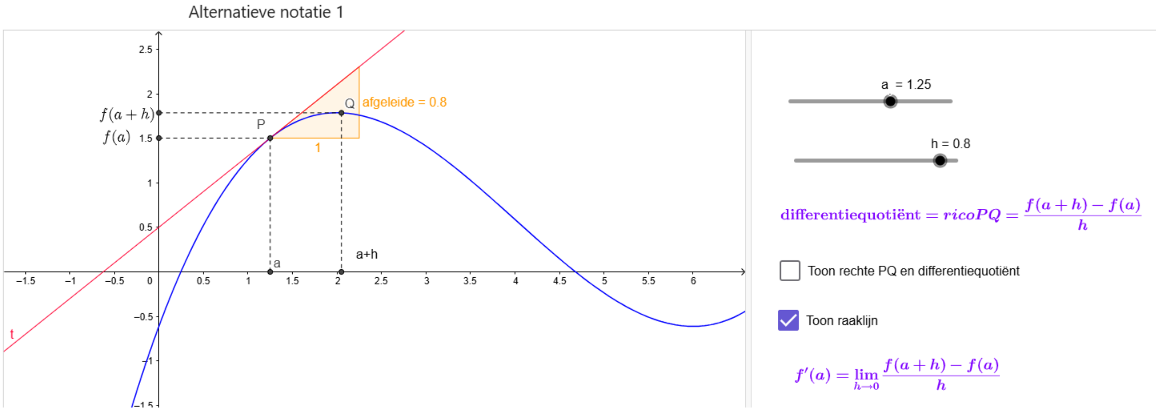


Figure 6: https://www.geogebra.org/m/NGkF3XS6

2 het getal e

2.1 grafisch

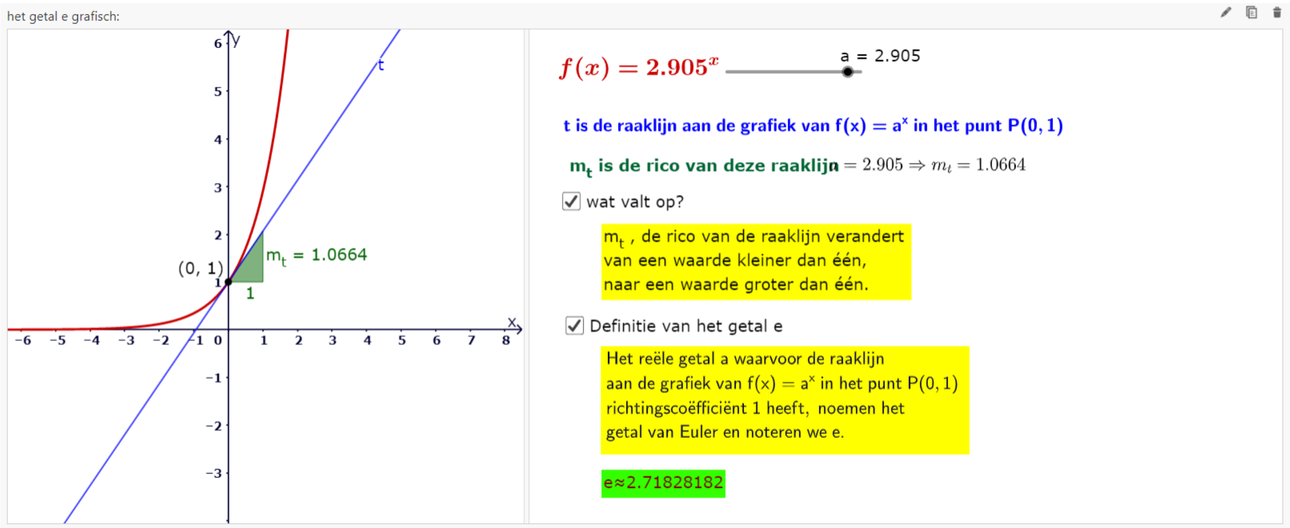


Figure 7: https://www.geogebra.org/m/Ea6Ku7yW

2.2 algebraïsch

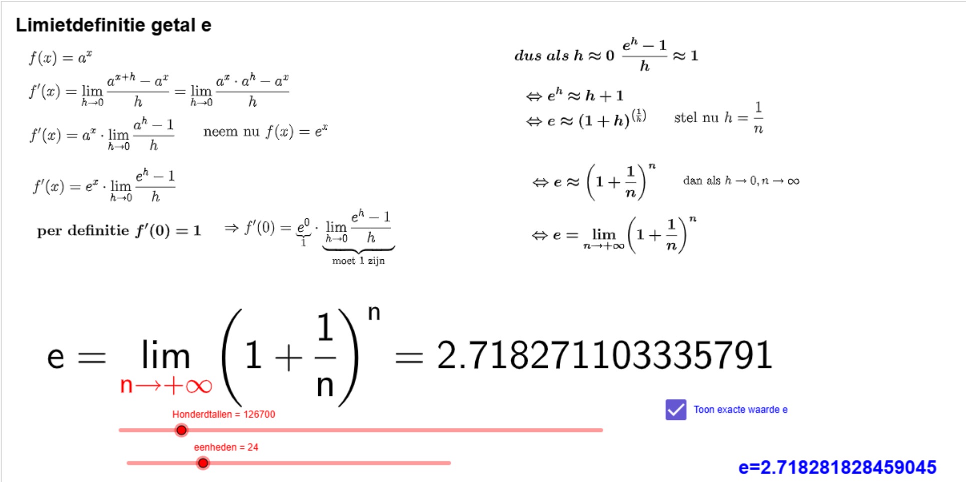


Figure 8: https://www.geogebra.org/m/Ea6Ku7yW

2.3 rekenregels

Rekenregels exponenten (op voorwaarde dat alle uitdrukkingen gedefinieerd zijn). m en n zijn gehele getallen.

1. $e^m \cdot e^n = e^{m+n}$
2. $(e^m)^n = e^{mn}$
3. $\frac{e^m}{e^n} = e^{m-n}$
4. $e^{-m} = \frac{1}{e^m}$
5. $e^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e}$
6. $e^0 = 1$
7. $e^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{e^m} = \left(\sqrt[n]{e}\right)^m$

Figure 9: https://www.geogebra.org/m/e2x3f7pm

3 Neperiaanse logaritme

3.1 grafisch

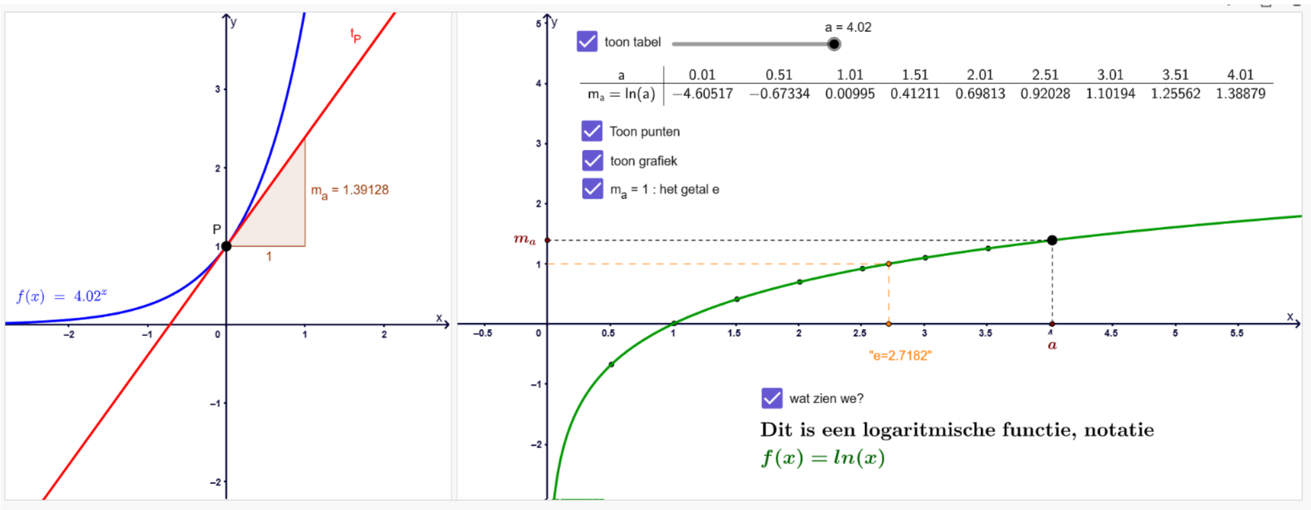


Figure 10: https://www.geogebra.org/m/Ea6Ku7yW

3.2 rekenregels

Rekenregels logaritmen (op voorwaarde dat alle uitdrukkingen gedefinieerd zijn)

1. $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
2. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
3. $\ln(x^r) = r \cdot \ln(x)$
4. $\ln(e^x) = x$
5. $e^{\ln(x)} = x$
6. $\ln(e) = 1$
7. $\ln(1) = 0$

Figure 11: https://www.geogebra.org/m/e2x3f7pm

4 exp en log functies met grondtal e

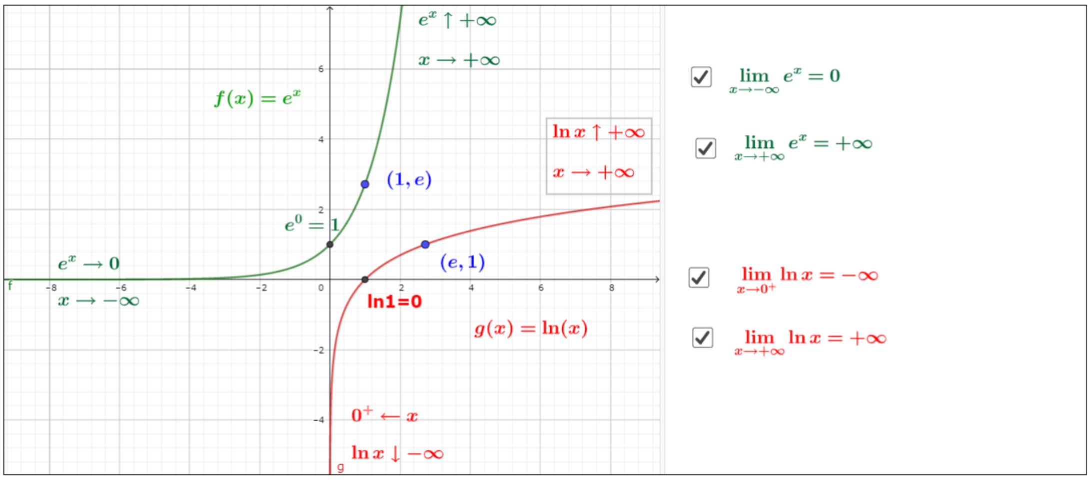


Figure 12: https://www.geogebra.org/m/e2x3f7pm

5 Afgeleide exponentiële en logaritmische functie

5.1 Afgeleide $f(x) = \ln(x)$

5.1.1 grafisch

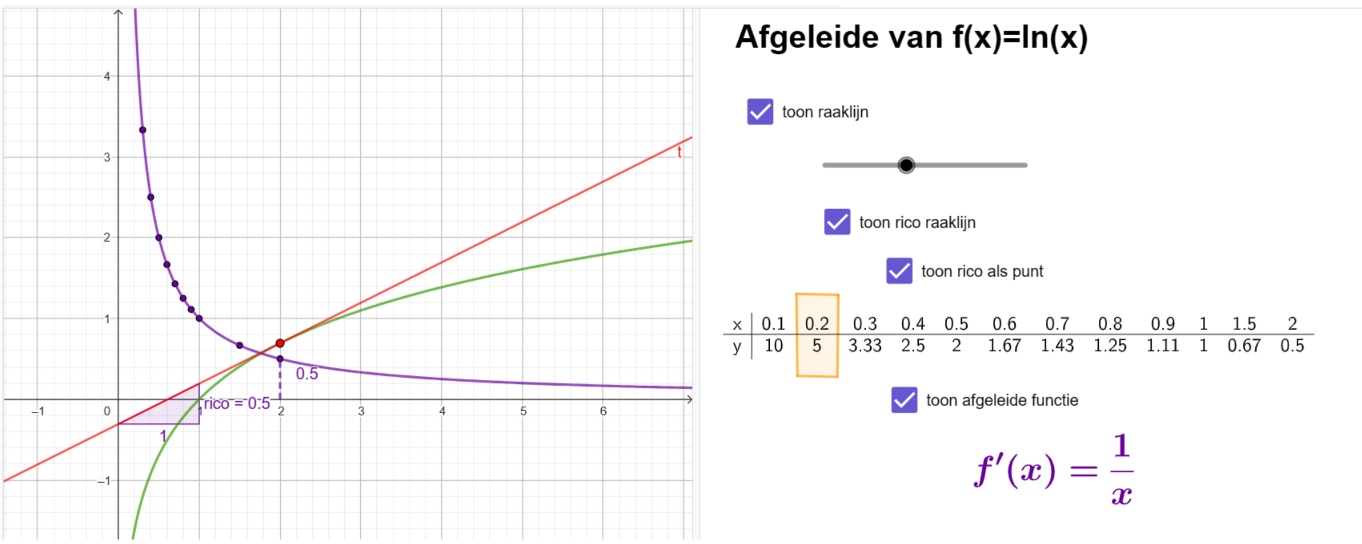


Figure 13: https://www.geogebra.org/m/qy3vtkdb

5.1.2 kettingregel

$$f(x) = \ln(\square) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\square} \cdot \square'$$

5.1.3 willekeurige logaritmische functie

$$f(x) = \log_a(x) = \frac{\log_e(x)}{log_e(a)} = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x \Rightarrow (\log_a x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$$

$$(\log_a \square)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{\square} \cdot \square'$$

5.2 afgeleide $f(x) = e^x$

5.2.1 algebraïsch

$$f(x) = \ln x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = e^x$$

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}\right)} \Rightarrow \left(e^x\right)' = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x$$

5.2.2 kettingregel

$$\left(e^{\square}\right)' = e^{\square} \cdot \square'$$

5.2.3 willekeurige exponentiële functie

$$f(x) = a^x = e^{\ln a^x} = e^{\ln a \cdot x} \Rightarrow \left(a^x\right)' = \ln a \cdot e^{\ln a \cdot x} = \ln a \cdot a^x$$

$$\left(a^{\square}\right)' = \ln a \cdot a^{\square} \cdot \square'$$

5.3 Overzicht rekenregels

$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$\left(e^{\square}\right)' = e^{\square} \cdot \square'$
$f(x) = a^x \ \left(a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}\right)$	$f'(x) = a^x ln a$	$\left(a^{\square}\right)' = a^{\square} ln a \cdot \square'$
$f(x) = ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$(ln \square)' = \frac{1}{\square} \cdot \square'$
$f(x) = {}^a\log x$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$	$\left({}^a\log \square\right)' = \frac{1}{\square \ln a} \cdot \square'$

Figure 14: https://www.geogebra.org/m/rkbXbnRv

6 Regel van L'Hospital

Bij de berekening van een limiet kunnen volgende onbepaaldheden zich voordoen:
$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$.
De regel van L'Hôpital kan onder bepaalde voorwaarden deze onbepaaldheden opheffen.
Onderstel dat de functies f en g afleidbaar zijn in een omgeving van $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, behalve in a, en dat $g'(x) \neq 0$ in deze omgeving van a, behalve eventueel in a.
Voor de eerste twee onbepaaldheden geldt dan volgende formule:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ of } \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

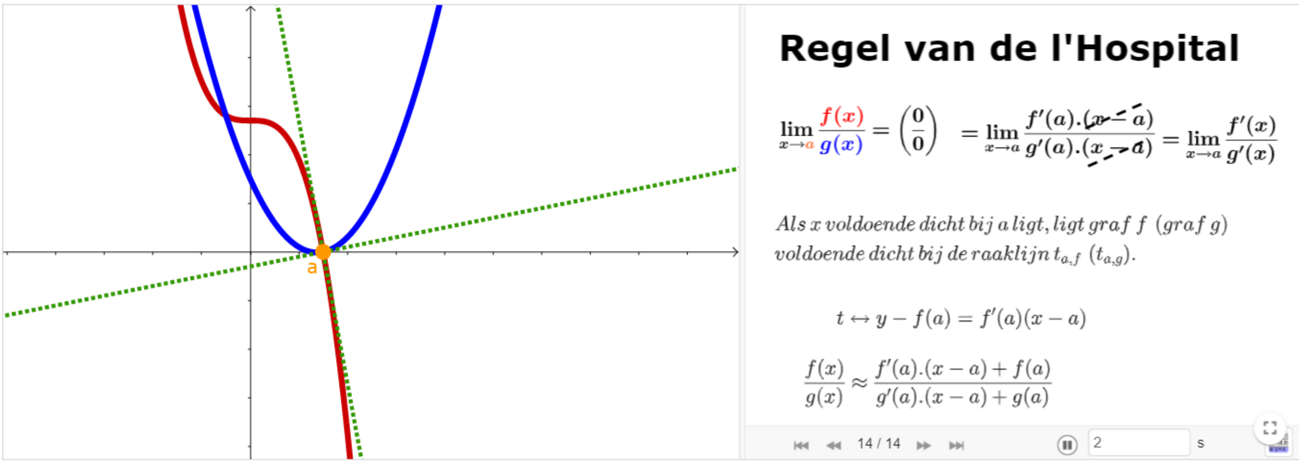


Figure 15: https://www.geogebra.org/m/D8F7EpY4

7 Verloop

7.1 asymptoten

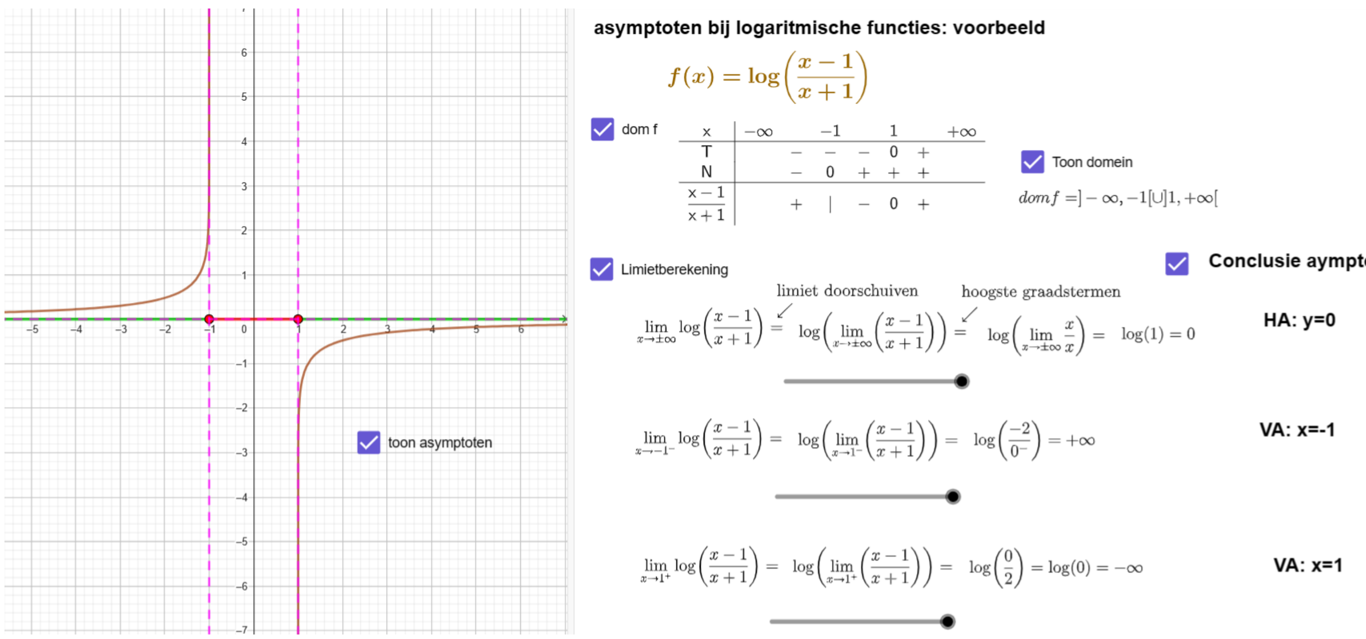


Figure 16: https://www.geogebra.org/m/qy3vtkdb

7.2 verloop

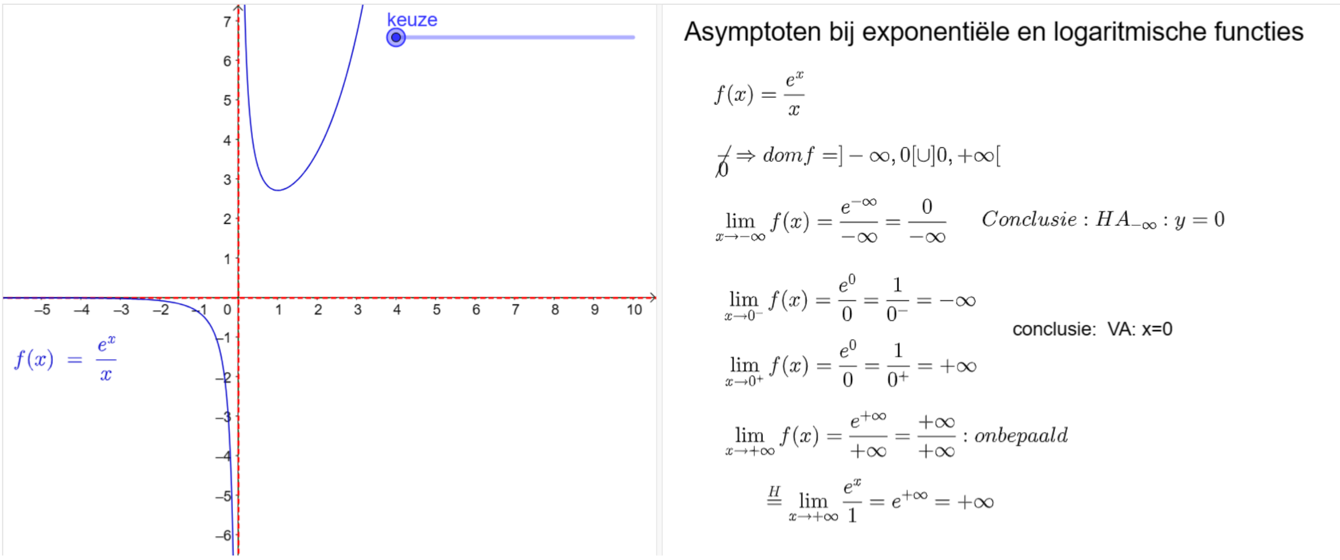


Figure 17: https://www.geogebra.org/m/qy3vtkdb

8 Toepassingen

8.1 Extremumproblemen

8.2 Kettinglijn

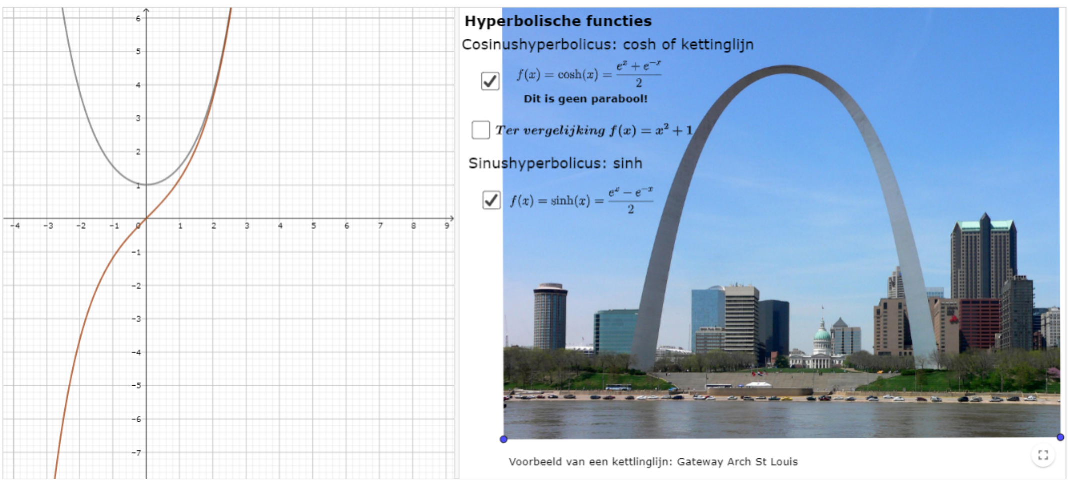


Figure 18: https://www.geogebra.org/m/d8enj4ud

8.3 Continuïteit

Definitie continuïteit:
De functie is continu voor x=a als $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

8.4 raaklijn en toepassingen

Vergelijking raaklijn in $P(a, f(a)$: y-f(a)=f'(a)(x-a)

8.4.1 raakpunt is gegeven

Bepaal de vergelijking van de raaklijn t in $P(e, f(e))$ met $f(x) = x \cdot (lnx)^2$

8.4.2 raakpunt is niet gegeven

Gegeven $f(x) = \frac{2+2lnx}{x}$. Bepaal de rechte door de oorsprong en die de grafiek van f raakt

8.5 Toepassingen uit het 'dagelijks leven'

Voorbeeld;
Een firma produceert fietsen. De totale opbrengst per maand kan gemodelleerd worden door de volgende functie (in het interval [0.5,8]) $f(x) = 20(x-1)e^{-0.5x}$ met x per 100 eenheden en f(x) per 1000 euro.

1. Vanaf welke productie wordt er niet meer met verlies gewerkt?
2. Bepaal bij welke productie de opbrengst maximaal is. Hoeveel bedraagt deze dan?
3. Toon aan op een correct wiskundige manier dat een opbrengst mogelijk is van meer dan 8000 euro.

9 Groeimodellen

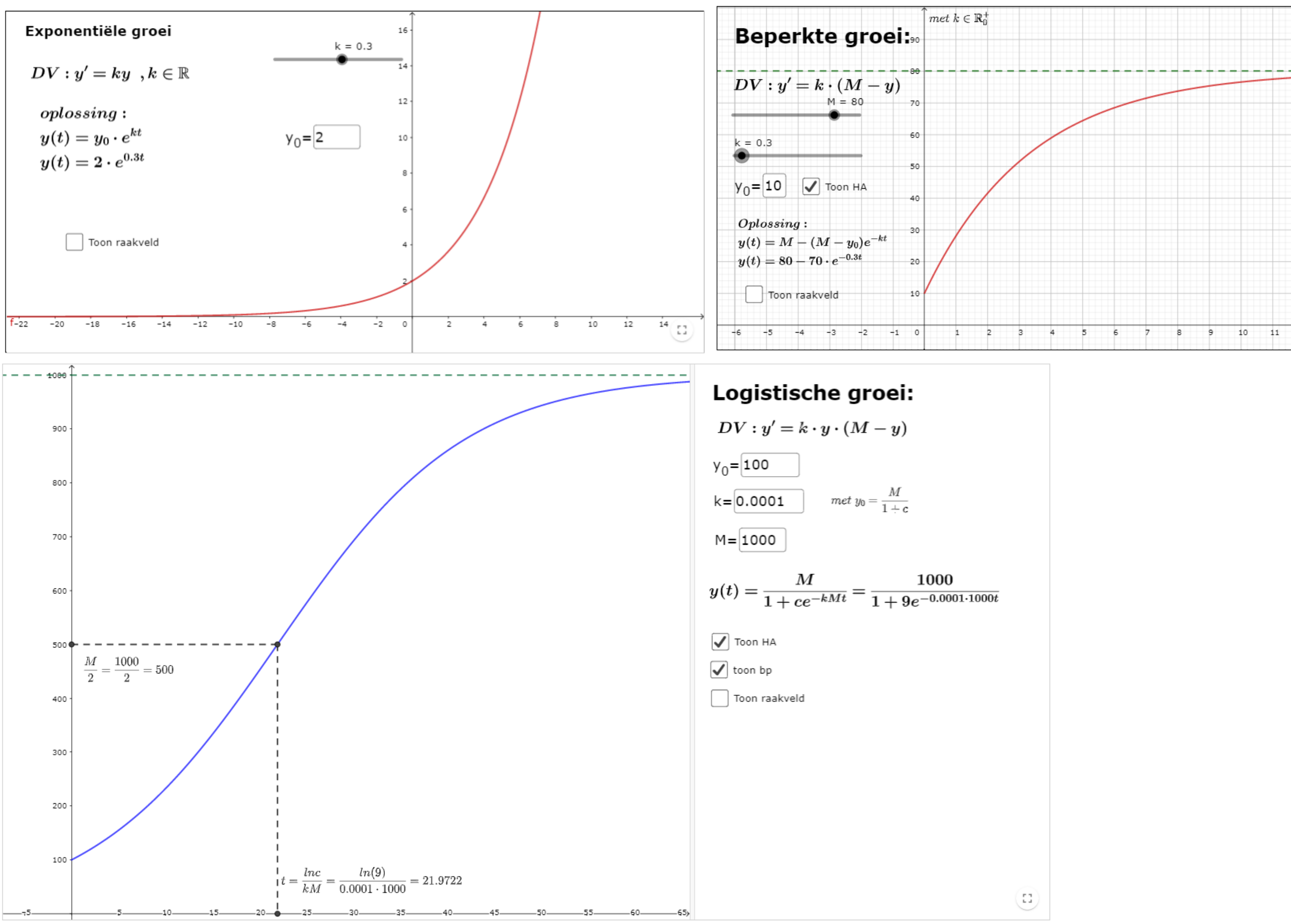


Figure 19: https://www.geogebra.org/m/VEWmAvhZ]https://www.geogebra.org/m/VEWmAvhZ

10 oefeningen

10.1 herhaling

1. Bereken $log_2(\sqrt{a})$ met $a = \frac{4\sqrt[3]{2}\sqrt{8}}{\sqrt[6]{32}}$

10.2 het getal e

1. J of F: $e = \lim_{n\to 0}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

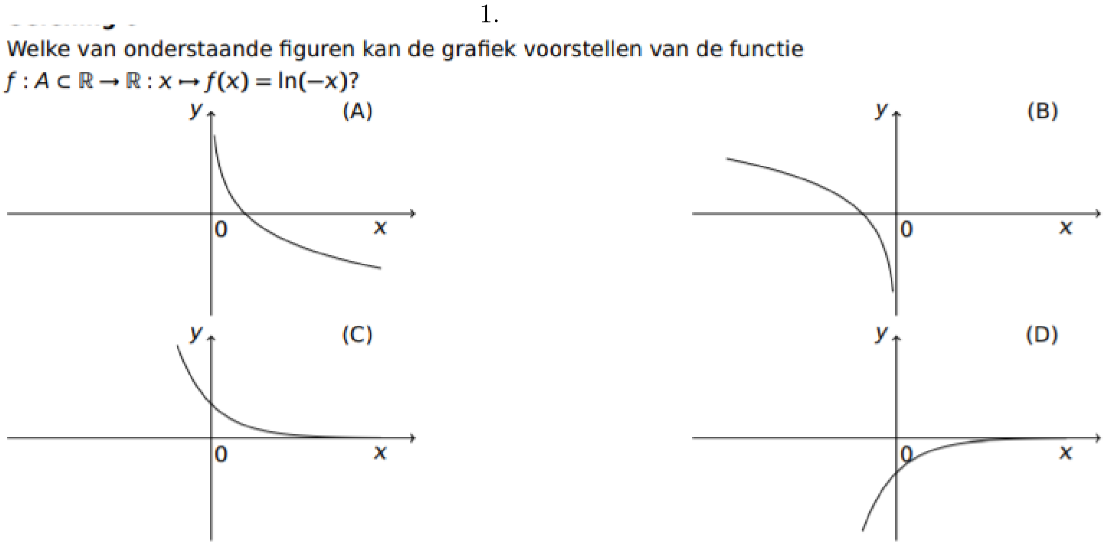
10.3 rekenregels

1. Vereenvoudig:
   (a) $e^{2ln(3)} + ln(e^2)$
   (b) $\ln\left(4^{\frac{3}{5}}\right) - \ln\left(\frac{e}{16^{\frac{1}{5}}}\right)$ (A.$2\ln 2 - 1$)
2. Welke waarde neemt de uitdrukking $\frac{e^{3x}-e^{-3x}}{e^{3x}+e^{-3x}}$ aan als $x = ln\sqrt{3}$?
3. Als $f(x) = e^{4x-3}$, toon dan aan dat $f\left(1 - ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) = e \cdot x^4$
4. los op: $ln(4x - 10) - ln(x - 2) = ln(x - 1)$
5. los op: $ln(x - 3) - ln6 = 2ln2$
6. Toon aan de oplossing van de vergelijking $5^x = 3^{x+4}$ kan geschreven worden als $x = \frac{\ln 81}{\ln 5 - \ln 3}$
7. Bereken $ln(x^2y^2)$ met

$$\begin{cases} lnx + lny^2 & = & 4 \\ lnx^2 - 3lnxy & = & -5 \end{cases}$$

10.4 exp en log functies met grondtal e

1.



2. Gegeven zijn de functies met parameter: $f_p(x) = p \cdot \ln(x)$ en $g_p(x) = e^{\frac{x}{p}}$
   (a) Toon aan dat deze functies elkaars inverse zijn
   (b) Voor een waarde van p is de rechte $y = x$ een gemeenschappelijke raaklijn. Bepaal die waarde van p en bepaal het raakpunt.

10.5 rekenregels afgeleide

1. bepaal de afgeleide van de volgende functies
   (a) $f(x) = \log\left(x^3 + 3^x\right)$
   (b) $f(x) = x^2 \cdot e^{x^3+7x}$
   (c) $f(x) = xln\left(e^{2x} + 2\right)$
   (d) $f(x) = ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$
   (e) $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$
   (f) $f(x) = x^2 \cdot e^{3x^2-5x}$
   (g) $f(x) = ln(2x - 6) \cdot e^{5x}$

2. Welke antwoord geeft de afgeleide van $f(x) = \ln\left(\frac{(x+5)^4}{\sqrt{x^2+4}}\right)$
   (a) $\frac{4}{x+5} - \frac{x}{x^2+4}$
   (b) $2\left(\frac{1}{x+5} - \frac{2x}{x^2+4}\right)$
   (c) $\frac{\sqrt{x^2+4}}{(x+5)^4}$
   (d) $\frac{\sqrt{x^2+4}}{x+5} \cdot \frac{8\sqrt{x^2+4}}{x}$

3. Toon aan:
   (a) Als $f(x) = x \cdot e^x$ dan $f^{(n)}(x) = (x + n)e^x$
   (b) Als $f(x) = \ln(1 - x)$ dan $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n(n-1)!}{(1-x)^n}$
   (c) Als $f(x) = x^2e^x$ dan $f^{(n)}(x) = (x^2 + 2nx + n(n - 1))e^x$

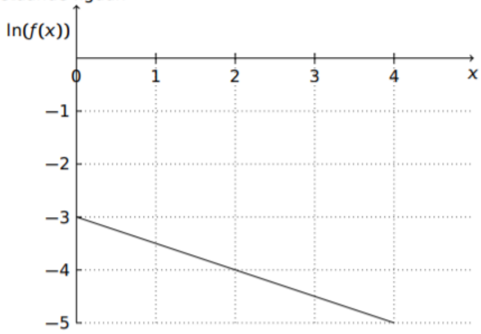
4. Bepaal $f'(0)$ met $f(x) = e^{e^x}$

5. Bepaal de waarde van k voor $f(x) = e^{kx} + x$ als

$$[Df(x)]^2 + D[f(x)^2] + f(x)^2 = (x + 1)^2$$

6. Los op

Gegeven is de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. De grafiek die het verband weergeeft tussen x en $\ln(f(x))$ is gegeven in onderstaande figuur.



Bepaal de afgeleide $f'(2)$.

(A) $f'(2) = \frac{-1}{2e}$ (B) $f'(2) = \frac{-1}{2e^2}$ (C) $f'(2) = \frac{-1}{2e^3}$ (D) $f'(2) = \frac{-1}{2e^4}$

10.6 regel van L'Hospital

1. Bereken:
   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x2^x}{2^x-1}$
   (b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{e^{x^2}-e^4}{x-2}$
   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x}{e^x-1} - \frac{1}{x}$
   (d) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sqrt{x}}$
   (e) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{-3}e^x$
   (f) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$
   (g) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}$
   (h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{lnx}$
   (i) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{lnx}}$
   (j) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^{10^{10}}}{e^x}$
   (k) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$
   (l) $\lim\limits_{x\to +\infty} x - x^2\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)$

10.7 verloop

1. Bepaal de maximale waarde van $y = x(ln(x))^2$
2. Stellen $f(x) = ln(x^2)$ en $f(x) = 2ln(x)$ dezelfde functies voor? Los vervolgens $ln(x^2) \leq e$ op.
3. Bespreek en teken de grafiek van $f(x) = e^{-x^2}$
4. Bespreek en teken de grafiek van $f(x) = ln(4 - x^2)$
5. Bespreek en teken de gafiek van $f(x) = x^x$
6. Gegeven de functie f met als voorschrift $f(x) = ln(1 - \sqrt{x})$
   (a) Bepaal het domein
   (b) Toon aan dat deze functie 1 op 1 is (bijectief)
   (c) Bepaal de inverse functie
7. Bereken de inverse functie van $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$. Toon eerst aan dat deze functie inverteerbaar is
8. Definieer de functie $f :]-1, +\infty[\to R$ door $f(x) = 2^{\frac{1}{1-x}}$
   (a) Bepaal de afgeleide van f en laat zien dat de afgeleide overal positief is
   (b) Bepaal het bereik van f
   (c) Laat zien dat f inverteerbaar is en bepaal de inverse van f, inclusief het domein van f^{-1}
9. Neem de functie $f : [0,1] \to R,\ f(x) = \frac{e^x}{x+1}$
   (a) Toon aan dat f stijgend is in het gegeven domein.
   (b) Toon aan $\frac{2}{e} \leq \frac{1}{f(x)} \leq 1$
10. Gegeven $f(x) = x - 3\ln(x-1)$ Bepaal het interval waarin de functie f monotoon stijgend ise.
11. Gegeven de functie f met als voorschrift $f(x) = x \cdot e^{-mx^2}$ met m een parameter.
    Bepaal de waarde(n) van m zodat de grafiek van f een bp heeft in $x = \frac{1}{2}$.

12. Gegeven de functie f met als voorschrift $f(x) = \frac{e^{mx}}{1-e^x}$ met m een parameter. Bepaal de waarde(n) van m zodat voor $x = ln2$ de grafiek van f een maximum heeft.

13. Gegeven de functie f met als voorschrift $f(x) = mx \cdot e^{mx}$ met m een parameter. Toon aan dat de y-waarde van het minimum van deze functies onafhankelijk van de waarde m is.

14. Toon aan dat de relatieve minima van de grafieken van de familie functies met voorschrift $f(x) = me^x - x + 1$ op een rechte liggen.

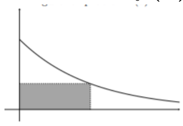
15. Toon aan dat de relative minima van de grafieken van de familie functies met voorschrift $f(x) = x + me^{-x}$ op een rechte liggen.

10.8 toepassingen

1. Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van $f(x) = x^2e^x$ in het punt $P(1, f(1))$ (A. $t \leftrightarrow y = 3ex - 2e$)

2. Toon aan dat de grafieken van $f(x) = \ln(x)$ en $g(x) = 1+e^2(1-\ln(x))$ elkaar loodrecht snijden

3. Bepaal de opp van de grootst mogelijke rechthoek die op volgende manier geconstrueerd wordt met $f(x) = e^{-x}$



4. Bepaal de waarde van a zodat volgende functie continu is:

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(x + e^{x+2}\right) & x > 0 \\ acosh(x) & x \leq 0 \end{cases}$$

5. Bepaal de waarde van a en b zodat volgende functie continu is:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ln(1+3x)}{2x} & x > 0 \\ ax + b & x \leq 0 \end{cases}$$

6. Bepaal de waarde van de parameters a en b zodat $y = 5x + 9$ de raaklijn in $x = 0$ aan de grafiek van $f(x) = 3e^{ax} + b$

7. Gegeven de functie $f : R \to R : x \mapsto f(x) = e^x - x$. Bepaal het raakpunt van de raaklijn die door de oorsprong gaat.

8. Bepaal de waarde van de constante k zodat de rechte $y = x$ raakt aan de grafiek van $y = k\ln x$ (A. $k = e$)

9. Bepaal het snijpunt met de x-as van de raaklijn in $P(e, f(e))$ met $f(x) = \frac{lnx}{x^2}$

10. Gegeven $f(x) = 3xe^{2x-10}$
    (a) Geef de lineaire benadering bij $x = 5$
    (b) Bepaal de intervallen waar $f(x)$ stijgend is

11. Een telefoonlijn die hangt tussen twee palen met een onderlinge afstand van 14 m kan beschreven worden m.b.v. een kettinglijn van de vorm $y = 20\cosh\left(\frac{x}{20}\right) - 15$
    (a) Bepaal de rico van de raaklijn in het rechter eindpunt
    (b) Bepaal de hoek die de kromme maakt met de rechterpaal

12. De lactatiecurve (van Wood) bij melkkoeien beschrijft het verband tussen de melkproductie y en de tijd sinds kalving t: $y = 23t^{0.42} \cdot e^{-0.2t}$. Bepaal het tijdstip waarop er een maximale melkproductie is.

13. Wiskundige biologen hebben een model ontwikkeld om het aantal tanden van een foetus alligator te beschrijven, t dagen na de conceptie:

$$N(t) = 71.8e^{-8.96e^{-0.0685t}}$$

Bepaal het buigpunt en geef de betekenis hiervan in deze context. (A. $t \approx 32$)

10.9 groeimodellen

1. Vertaal wiskundig dit fragment uit een krantenartikel van De Morgen

> **Terwijl een exponentiële curve ineens kan omhoogschieten.**
> "Het woord 'exponentieel' wordt vaak gebruikt als men gewoon 'heel groot' of 'heel snel' bedoelt, maar het is iets bijzonders: iets groeit exponentieel als het groeit in proportie tot de afmetingen die het heeft: hoe groter iets is, hoe sneller het groeit. Bij het begin van de pandemie zagen veel politici dat niet, omdat er nog maar een paar besmettingen waren."

2. Toon aan dat $P\left(\frac{lnc}{kM}, \frac{M}{2}\right)$ de coördinaten van het buigpunt van de grafiek zijn die hoort bij logistische groei.

3. De halfwaardetijd van Plutonium-239 is 24110 jaar. Door een menselijke fout lekt 10kg in het bijgelegen koelmeer van een kerncentrale.
   (a) Geef een voorschrift voor de hoeveelheid overgebleven Plutonioum-239 in functie van de tijd
   (b) Bepaal de overgebleven hoeveelheid na 1000 jaar
   (c) Bij een rest van 1 kg is het meer terug leefbaar. Na hoeveel jaar is dit?

4. Een populatie $p(t)$ groeit exponentieel, waarbij geweten is dat $p(10) = 2$ en $p(50) = 6$ (in mijoen aantal).
   (a) Bepaal het algemeen voorschrift (A. $p(t) = p_0 e^{kt}$)
   (b) Bepaal de parameters p_0 en k (A. $k = \frac{\ln 3}{40}$ en $p_0 = 2e^{-\frac{\ln 3}{4}} = 6e^{-\frac{5\ln 3}{4}}$)

5. Beschouw een groeimodel met beperkte groei (of afname)
   (a) Geef de differentiaalvergelijking en de oplossing van dit groeimodel
   (b) Iemand neemt een thermometer mee van binnen naar buiten. Buiten is het −15C koud. Na één minuut wijst de thermometer 16C aan, na 5 minuten −1C. Bereken de binnentemperatuur

6. Het aantal fruitvliegjes in een kweekomgeving kan gemodelleerd worden volgens een logistisch groeimodel. Initieel zijn er 4 fruitvliegjes en na 5 dagen is hun aantal al toegenomen tot 23, terwijl er maximaal 230 vliegjes kunnen overleven in de kweekomgeving.
   (a) Geef de passende differentiaalvergelijking
   (b) Hoe lang duurt het vooraleer er 180 vliegjes zijn?
   (c) Bepaal het tijdstip waarop de groeisnelheid het grootst is.
   (d) Geef een schets waarop je de belangrijkste kenmerken van dit groeimodel aanduidt

7. In een vijver worden 20 vissen uitgezet. De groei van de vispopulatie wordt gegeven door $P'(t) = 0.0005P \bullet (800 - P)$. Bepaal het tijdstip waarop er 300 vissen zullen zijn.

8. Een kip wordt vanuit de koelkast $(6C)$ in een voorverwarmde oven van $(200C)$ gezet. Na 20 minuten is de temperatuur van de kip al $(160C)$. Geeft het functievoorschrift die het temperatuurverloop van de kip in de oven beschrijft.

9. De temperatuur van een fles melk daalt met een snelheid van 0,0837 keer het verschil tussen de melktemperatuur en de kamertemperatuur die 20 bedraagt.
   (a) Formuleer het bovenstaande verband m.b.v. een DV

(b) Onderstel dat de melk aanvankelijk 80 warm is. Na hoeveel tijd is de melktemperatuur tot 50 gezakt? (A $\pm 8m17s$)

10. In het TV-programma het lichaam van Coppens voeren Staf en Mathias allerlei experimenten uit. Eén van deze experimenten speelde zich in een diepvriescel bij een temperatuur van $-30C$. Staf neemt per ongeluk zijn GSM mee naar binnen. Bij het buitengaan wil hij zijn berichten controleren. Dit lukt pas als de GSM terug opgewarmd is tot $0C$. Als de GSM na twee minuten al een temperatuur heeft van $-25C$, hoelang duurt het dan vooraleer Staf zijn berichten kan controleren, als je weet dat Staf zich nu in een ruimte met een omgevingstemperatuur van $20C$ bevindt.

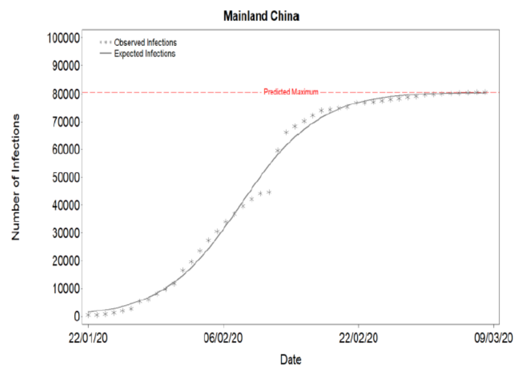
11. De huidige temperatuur van een tas melk in een ruimte met een omgevingstemperatuur van 22° bedraagt 10° C. 20 minuten later is de temperatuur al opgelopen tot 12° C. De tas melk kwam uit een koelkast met een temperatuur van 4°C. Hoeveel minuten geleden was de tas melk uit de koelkast genomen? (A. ongeveer 45 minuten)

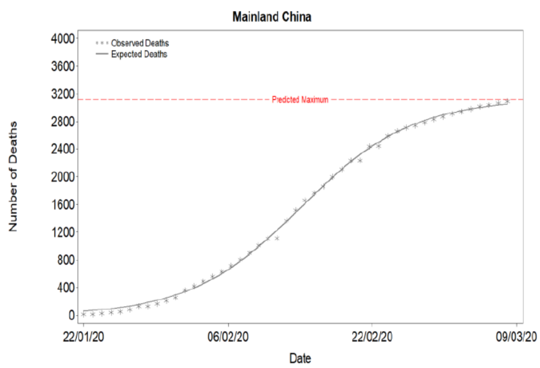
12. In een gebied met een maximale bevolkingscapaciteit van 100000 mensen leven initieel 100 individuen. Na een jaar is dit aantal gestegen tot 120. Wanneer is de groeisnelheid het grootst, op basis van een logistisch groeimodel? (A:37j10m3d)

13. Het grote probleem vandaag de dag bij de productie van groene energie (bijv. wind- en zonne-energie is de opslag hiervan. Gelukkig dalen de prijzen van lithiumbatterijen evenredig met de actuele prijs. Op 1 januari 2010 kostte de opslag nog 1000 Euro/kWh, op 1 januari 2016 nog 273 Euro/kWh. Hoeveel maanden zal het nog duren om een aanvaardbare kostprijs voor de particulier van 100 Euro/kWh te halen? (bron http://blog.zonnepanelen.nl/2016/03/ontwikkeling-van-zonnepanelen, geraadpleegd op 6/12/2017)

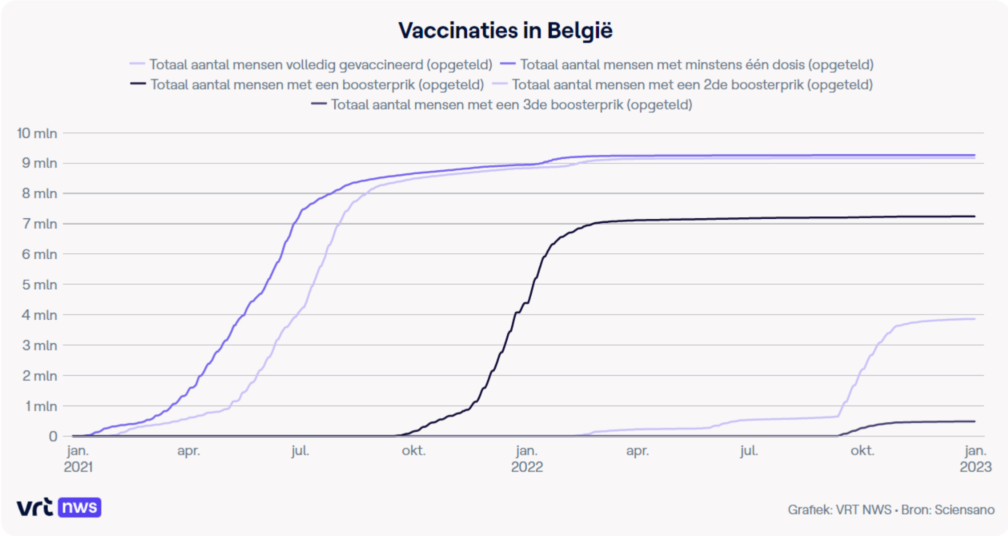
14. Enkele voorbeelden van een logistiche groei uit het coronatijdperk

(a) Corona in China bij het begin van de epidemie





(b) Het aantal vaccinaties is België



11 taken

1. verloop
2. L'Hospital