2.7 Cilindros, conos, esferas y pirámides

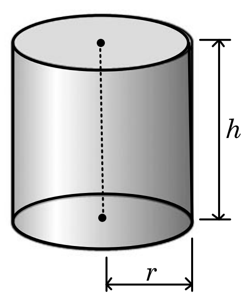
OBJETIVOS

- Calcular el área y el volumen de cilindros, conos, esferas y pirámides regulares
- Resolver problemas de solidos inscritos y circunscritos.
- Resolver problemas en los cuales los modelos se construyen utilizando las fórmulas de áreas y volúmenes de sólidos.

En ésta sección se estudiará como calcular el volumen y el área del cilindro, el cono, la esfera y las pirámides regulares. Al igual que la sección anterior, el desarrollo de los contenidos es informal y no se presentan las deducciones de las fórmulas; algunas de ellas son intuitivas mientras que otras requieren del cálculo integral para ser demostradas.

El cilindro

Un cilindro es un sólido que tiene dos bases circulares iguales contenidas en planos paralelos. La **superficie lateral** o área lateral del cilindro está formada por todos los puntos que unen las dos bases del cilindro. El **eje del cilindro** circular es el segmento que une los dos centros de las bases. Si el eje es perpendicular a las bases el cilindro se llama **cilindro circular recto**, mientras que cuando el eje no es perpendicular a las bases se llama **cilindro oblicuo**. La **altura** h del cilindro circular es el segmento perpendicular a las dos bases. El **radio** r del cilindro es el radio de cualquiera de las bases iguales. En la figura se muestra un cilindro circular recto.



Las fórmulas para calcular el área lateral, el área total y el volumen de un cilindro se obtienen de la misma forma que las de un prisma recto, es decir que el área lateral es el perímetro de la base multiplicado por la altura, mientras que el área total es el área lateral más el área de las dos bases circulares iguales.

$$A.L. = (2\pi r)h$$

$$A.T. = 2hrh + 2\pi r^2$$

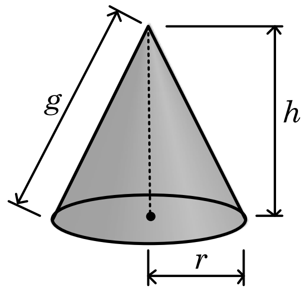
El volumen se obtiene multiplicando el área de la base por la altura, es decir

$$V = \left(\pi r^2\right)h$$

El cono

Es un sólido que se forma con una base en forma de círculo y un punto fuera del círculo llamado **vértice.** El **eje del cono** es el segmento de recta que va del vértice al centro de la base circular. La **altura** h del cono es el segmento perpendicular a la base que une a ésta con el vértice. Si el eje del cono es perpendicular a la base el cono se **llama cono circular recto,** mientras que si el eje no es perpendicular a la base el cono se llama **cono oblicuo**.

En un cono circular recto, se llama **generatriz** al segmento que va del vértice a un punto en la circunferencia de la base. La figura muestra un cono circular recto.



La **superficie lateral** o área lateral de un cono está formada por todos los puntos que se obtienen al unir el vértice con cualquier punto de la circunferencia en la base del cono. El área lateral del cono está dada por

$$A.L. = (2\pi r)g$$

Donde g es la generatriz que se puede calcular por el teorema de Pitágoras, $g = \sqrt{r^2 + h^2}$, entonces

$$A.L. = (2\pi r)\sqrt{r^2 + h^2}$$

El área total del cono se obtiene al sumar el área lateral con el área de la base

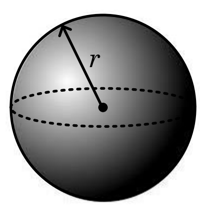
$$A.T. = (2\pi r)\sqrt{r^2 + h^2} + \pi r^2$$

La fórmula para calcular el volumen del cono es la tercera parte del área de la base multiplicada por la altura

$$V = \frac{1}{3}\left(\pi r^2\right)h$$

La Esfera

Una esfera es un sólido que está formado por todos los puntos en el espacio que están a una misma distancia de un punto fijo llamado **centro de la esfera.** Esta distancia se llama **radio de la esf**era. La figura siguiente muestra una esfera de radio r



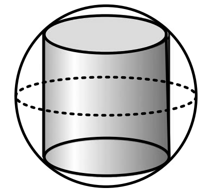
Las fórmulas para calcular el área superficial y el volumen de una esfera son

$$A = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

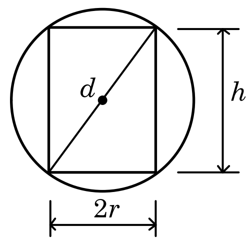
Ejemplo 1: El cilindro inscrito en una esfera

Se inscribe un cilindro circular recto dentro de una esfera de radio 8 cm, como se muestra en la figura. Si la altura del cilindro es el doble de su diámetro, calcule el volumen del cilindro.



Solución

Para establecer como se relacionan la altura y el radio del cilindro con el radio de la esfera, es recomendable hacer una gráfica de una sección transversal del sólido, en donde se vean los datos involucrados.



En la figura de arriba d es el diámetro de la esfera, h es la altura del cilindro y $2r$ es el diámetro del cilindro. Como el triángulo formado por estos segmentos es rectángulo, al utilizar el teorema de Pitágoras se tiene

$$d^2 = (2r)^2 + h^2$$

$$(16)^2 = 4r^2 + h^2$$

Como la altura del cilindro es el doble de su diámetro, entonces

$$h = 2(2r) = 4r$$

Sustituyendo h y despejando r

$$16^2 = 4r^2 + (4r)^2$$

$$256 = 4r^2 + 16r^2$$

$$256 = 20r^2$$

Por lo que el radio del cilindro es

$$r = \sqrt{\frac{256}{20}} = \sqrt{\frac{64}{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

Y la altura del cilindro es

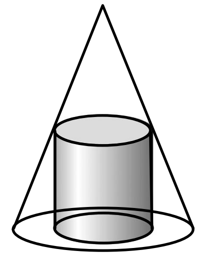
$$h = 4r = 4\left(\frac{8\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{32\sqrt{5}}{5}$$

Ahora ya se puede calcular el volumen del cilindro

$$V = \left(\pi r^2\right)h = \pi\left(\frac{8\sqrt{5}}{5}\right)^2\left(\frac{32\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{(64)(5)(32)\pi\sqrt{5}}{(25)(5)} = \frac{2048\pi\sqrt{5}}{25} \approx 575.47 \text{ cm}^3$$

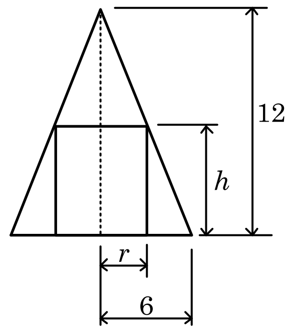
Ejemplo 2: El cilindro inscrito en un cono

Se inscribe un cilindro circular recto dentro de un cono circular recto de radio 6 cm y altura 12 cm, como se muestra en la figura. Si la altura del cilindro es el doble de su radio, calcule el volumen dentro del cono y fuera del cilindro.



Solución

Sea r el radio del cilindro y h su altura. Al hacer un dibujo de la sección transversal que pasa por el eje de los sólidos se tiene



El triángulo de base 6 y altura 12 es semejante con el triángulo de base $6 - r$ y altura h, pues son triángulos rectángulos y tienen un ángulo común. Al utilizar la proporcionalidad de la altura con respecto a la base se obtiene

$$\frac{h}{12} = \frac{6 - r}{6}$$

Como la altura h del cilindro es igual al doble del radio, $h = 2r$, se tiene

$$\frac{2r}{12} = \frac{6 - r}{6}$$

$$2r = 12 - 2r$$

$$4r = 12$$

$$r = \frac{12}{4} = 3$$

Entonces el radio del cilindro es $r = 3\,\text{cm}$ y la altura es $h = 6\,\text{cm}$.

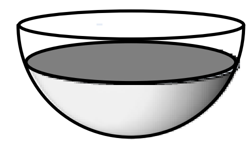
Ahora se puede calcular el volumen dentro del cono y fuera del cilindro que no es más que el volumen del cono menos el volumen del cilindro.

$$\begin{aligned} V &= V_{\text{cono}} - V_{\text{cilindro}} \\ &= \frac{1}{3}\pi R^2 H - \pi r^2 h \\ &= \frac{1}{3}\pi(6)^2(12) - \pi(3)^2(6) \\ &= 144\pi - 54\pi \\ &= 90\pi \end{aligned}$$

El volumen dentro del cono y fuera del cilindro es $90\pi\ \text{cm}^3$.

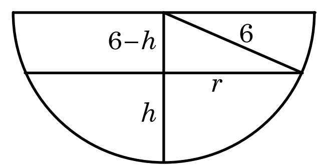
Ejemplo 3: El espejo de agua en un tanque semiesférico

Un depósito tiene forma semiesférica de radio 6 pies y tiene su parte ancha hacia arriba. Si el depósito contiene agua con una profundidad de 4 pies. Calcule el área del espejo de agua que se forma en la superficie del agua.



Solución

El espejo de agua es la sección circular horizontal que se forma en la superficie del agua. Para encontrar la forma como se relacionan los segmentos se dibujara una sección transversal vertical que pase por el centro del depósito, donde r es el radio del espejo de agua circular.



Usando el teorema de Pitágoras se puede expresar el radio r en términos de la altura del agua h y del radio de la esfera

$$r^2 + (6 - h)^2 = (6)^2$$

$$r^2 + 36 - 12h + h^2 = 36$$

$$r^2 = 12h - h^2$$

$$r = \sqrt{12h - h^2}$$

Como $h = 4$

$$r = \sqrt{12(4) - (4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ pies.}$$

El área del espejo de agua es

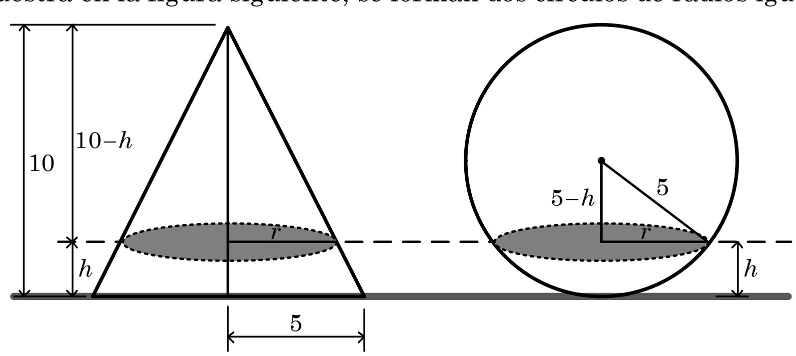
$$A = \pi r^2 = \pi\left(4\sqrt{2}\right)^2 = 32\pi \text{ pies}^2$$

Ejemplo 4: Calculando la altura de un plano

Una esfera de radio 5 cm y un cono de radio 5 cm y altura 10 cm, se encuentran colocados sobre una superficie plana. Se desea trazar un plano paralelo a la superficie de manera que de sus intersecciones con los dos sólidos resulten círculos iguales. ¿A qué distancia de la superficie debe quedar el plano?

Solución

Al trazar un plano a una altura h de la superficie sobre la cual descansan los dos sólidos, como se muestra en la figura siguiente, se forman dos círculos de radios iguales r.



La idea es expresar r en términos de h, tanto en el cono como en la esfera. Como los radios de los círculos son iguales, se puede establecer una ecuación en términos de h, igulando el radio del cono con el radio de la esfera.

En el cono se forman dos triángulos semejantes, en donde

$$\frac{10-h}{10} = \frac{r}{5}$$

$$r = \frac{10-h}{2}$$

En la esfera se forma un triángulo rectángulo, donde la hipotenusa es el radio de la esfera y uno de los catetos es el radio del círculo, entonces

$$r^2 + (5-h)^2 = 5^2$$

$$r^2 = 25 - (5-h)^2$$

$$r^2 = 25 - 25 + 10h - h^2$$

$$r = \sqrt{10h - h^2}$$

Igualando los radios ya que éstos son iguales

$$\sqrt{10h - h^2} = \frac{10-h}{2}$$

Al resolver la ecuación anterior se obtendrá la altura h

$$10h - h^2 = \left(\frac{10-h}{2}\right)^2$$

$$10h - h^2 = \frac{100 - 20h + h^2}{4}$$

$$40h - 4h^2 = 100 - 20h + h^2$$

$$5h^2 - 60h + 100 = 0$$

$$h^2 - 12h + 20 = 0$$

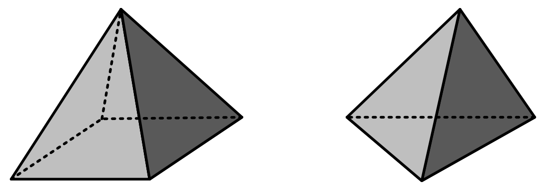
$$(h-10)(h-2) = 0$$

Las soluciones de la ecuación anterior son $h = 10$ y $h = 2$. Como puede comprobarse los dos valores de h resuelven el problema, ya que si $h = 10$ se obtienen dos círculos iguales de radio $r = 0$, mientras que cuando $h = 2$ se obtienen dos círculos iguales de radio $r = 4$.

Pirámides

Una **Pirámide** es un sólido que tiene como base un polígono y un punto fuera del plano que contiene a la base llamado **vértice**, de tal forma que cada vértice del polígono está unido al vértice de la pirámide por un segmento llamado **arista**. Dos aristas consecutivas junto con un lado de la base forman un triángulo llamado **cara lateral.**

Una pirámide se llama **pirámide regular** si su base es un polígono regular y sus caras laterales son triángulos iguales. **La altura de una pirámide** es el segmento perpendicular que va desde el vértice al plano que contiene a la base. El **apotema** de una pirámide regular es la altura de cualquiera de los triángulos iguales que sirven de caras laterales. La figura siguiente muestra una pirámide regular de base cuadrada y una pirámide no regular de base triangular.



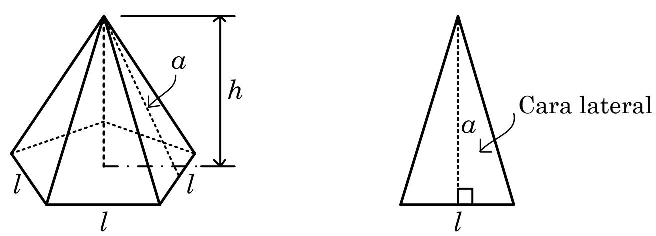
Pirámide regular Pirámide no regular

Área y volumen de una pirámide

El **área lateral** de una pirámide es igual a la suma de las áreas de sus caras laterales. El **área total** es igual a la suma del área lateral más el área de la base.

Para calcular el área lateral y el área total en una pirámide no regular es necesario conocer las medidas de todas sus caras laterales y el área de su base.

Para calcular el área lateral de una pirámide regular únicamente se necesita calcular el área de una de las caras laterales y multiplicarla por el número de lados. La figura siguiente muestra una pirámide regular y una de sus caras laterales



Si la base tiene n lados, el área lateral es

$$A.L. = n\left(\frac{1}{2}al\right) = \frac{nal}{2}$$

El volumen de una pirámide regular se obtiene multiplicando el área de la base B por la altura y dividiendo entre tres. (Se requiere de matemática más avanzada para deducir las fórmulas de volumen)

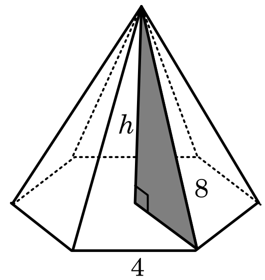
$$V = \frac{1}{3}Bh$$

Ejemplo 5: Área y volumen de una pirámide

La arista lateral de una pirámide regular mide 8 cm. La base es un hexágono regular de lado 4 cm. Encontrar el área lateral y el volumen de la pirámide.

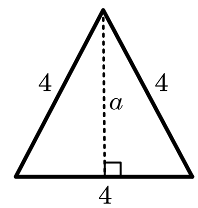
Solución

En la figura se muestra la pirámide hexagonal, Observe que la arista lateral, la altura h y el radio del hexágono forman un triángulo rectángulo, el cual se muestra sombreado en la figura



La base es un hexágono de lado 4 cm, para obtener el área del polígono es necesario calcular el apotema. Por el teorema de Pitágoras

$$
\begin{aligned}
4^2 &= a^2 + 2^2 \\
a &= \sqrt{16-4} \\
&= \sqrt{12} \\
&= 2\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

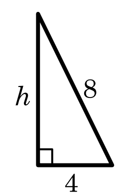


El área de la base de la pirámide es

$$B = 6\left(\frac{1}{2}(4)\left(2\sqrt{3}\right)\right) = 24\sqrt{3}$$

Para calcular la altura de la pirámide, nuevamente se utiliza el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo que tiene como hipotenusa una arista

$$
\begin{aligned}
h^2 + 4^4 &= 8^2 \\
h &= \sqrt{64-16} \\
&= \sqrt{48} \\
&= 4\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

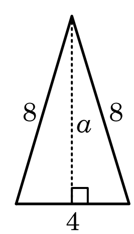


Entonces el volumen de la Pirámide es

$$V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}\left(24\sqrt{3}\right)\left(4\sqrt{3}\right) = (32)(3) = 96\,\text{cm}^3$$

Para obtener el área lateral primero hay que calcular el área de una de las caras. La apotema de la cara lateral es

$$
\begin{aligned}
a &= \sqrt{8^2 - 2^2} = \sqrt{60} \\
&= 2\sqrt{15}
\end{aligned}
$$



Entonces el área de una cara lateral es

$$A = \frac{1}{2}(4)\left(2\sqrt{15}\right) = 4\sqrt{15}$$

El área lateral de la pirámide es

$$A.L. = 6A = 6\left(4\sqrt{15}\right) = 24\sqrt{15}$$

Ejercicios de la sección 2.7

1. El volumen de un cilindro es $320\pi\,\text{cm}^3$ y su altura es 5 cm. Calcule su área lateral.

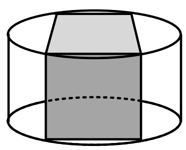
2. Encuentre el volumen de un cilindro generado por la rotación de un rectángulo de 4 cm por 10 cm alrededor de su lado menor.

3. En un cilindro en donde el área lateral es el doble de la suma del área de las bases. ¿Cómo están relacionadas su altura y su radio?

4. En una fábrica se va a construir una lata cilíndrica de aluminio para colocar su producto. La altura del cilindro debe ser de 10 pulgadas y el área superficial total igual a 112π pulgadas cuadradas. Determine el radio de la lata cilíndrica.

5. Se inscribe un cilindro circular recto en un prisma rectangular de base cuadrada de lado 4 cm y altura 6 cm. Encuentre el volumen del cilindro.

6. Se inscribe un cubo en un cilindro circular recto como se muestra en la figura. Si la arista del cubo mide 5 cm. Calcule el volumen del cilindro.



7. Encontrar en qué porcentaje aumenta el volumen de un cilindro cuando la altura se aumenta en 10% y el radio se aumenta en 25%.

8. Un depósito cilíndrico descansa sobre el suelo de tal forma que su eje está en forma horizontal. La altura del cilindro es 6 m y su diámetro es 3 m. Calcule el área del espejo de agua cuando la altura del agua es de 2 m.

9. Un cono de radio 6 cm tiene un área total de 156π cm^2. Encontrar su volumen.

10. Un cilindro y un cono tienen radios y alturas iguales. ¿En qué razón están sus volúmenes?

11. Un cono se inscribe en una pirámide rectangular regular, de tal forma que el vértice del cono coincide con el vértice de la pirámide. Encontrar el volumen de la pirámide si la directriz del cono mide 9 cm y el radio de la base del cono mide 4 cm.

12. Se funde un cilindro metálico de radio 6 y altura 18 cm. Con el material resultante se construye un cono de radio 7 cm. Encontrar la altura del cono.

13. Se construye una tienda de campaña cónica utilizando una lona que tiene forma de semicírculo de radio 2 m. Encuentre el volumen de la tienda de campaña.

14. Encuentre el área de una esfera que tiene un volumen de 288π cm^3.

15. Se corta una esfera de radio 8 cm con un plano que pasa a 3 cm de su centro. Encontrar el área de la sección transversal circular.

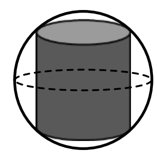
16. Una esfera de radio 6 cm. Será recubierta con una capa metálica de 0.5 cm de espesor. Calcule la cantidad de material necesario para recubrir la esfera.

17. Se circunscribe un cilindro circular recto a una esfera de radio R. Encuentre el área lateral del cilindro en términos de R.

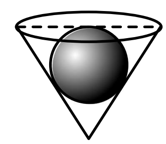
18. Se inscribe un cilindro circular recto dentro de una esfera de radio 6 cm. La altura del cilindro es igual a su diámetro. Encontrar el volumen del cilindro.

19. Se funden dos esferas de plástico de radios k y $2k$. El material resultante se utiliza para construir un cilindro de altura $3k$. Encontrar el radio del cilindro.

20. Se inscribe un cilindro recto de altura 8 cm en una esfera de radio 5 cm. Encontrar el volumen del cilindro.



21. Se inscribe una esfera dentro de un cono circular recto de base 8 cm y generatriz 8 cm, como se muestra en la figura. Encontrar el volumen de la esfera.



22. Una esfera de radio 6 cm. Tiene un cubo inscrito y un cubo circunscrito. Encontrar la razón de las áreas del cubo inscrito al cubo circunscrito.

23. Para fabricar municiones de escopeta de 0.25 cm de diámetro se funden cilindros de plomo de 2 cm de diámetro y 20 cm de longitud. ¿Cuántas municiones se obtienen de un cilindro de plomo?

24. Un cono truncado se forma cuando un cono regular recto de 5 cm de radio y 12 cm de altura es cortado por un plano paralelo a la base del cono y que pasa a 5 cm de la base. Calcule el volumen del cono truncado.

25. Encontrar el área lateral de una pirámide cuya base es un hexágono de lado 6 cm y que tiene una altura de 12 cm.

26. Cada una de las aristas de una pirámide triangular regular mide 4 cm. Calcule su volumen.

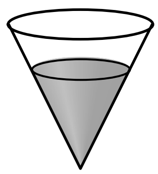
27. La base de una pirámide es un cuadrado de lado 10 cm. Cada una de las aristas mide 15 cm. Encuentre el volumen y el área lateral de la pirámide.

28. La artista de una pirámide hexagonal regular mide 8 cm. El lado de la base mide 4 cm. Encontrar el volumen de la pirámide.

29. Un depósito tiene la forma de un cono circular recto invertido de 2 metros de radio y 6 metros de altura.

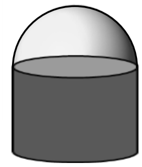
(a) Calcule la capacidad total del depósito.

(b) Si el depósito contiene agua hasta una altura de 4 metros. Calcule el volumen de agua.

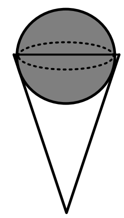


30. Un cono circular recto cuya altura es igual al doble del diámetro de su base se inscribe en una esfera de radio 6 cm. Calcule el volumen del cono.

31. Se va a construir una bodega para almacenar granos con la forma de un cilindro circular recto coronado con un techo semiesférico, como se muestra en la figura. Si las paredes del cilindro tienen una altura de 5 metros. Si el área superficial total es de 336 metros cuadrados, determine el radio del cilindro.



32. Un cono de helado tiene 2 pulgadas de diámetro en la parte superior y 4 pulgadas de altura. En él se vierte una bola de helado esférica de modo que la mitad de ella queda dentro del cono, como se muestra en la figura. Encuentre el volumen de la esfera de helado.



33. En el problema anterior, si la bola de helado se derrite, calcule la altura el helado alcanza dentro del cono.