Proyecto MaTEX

Razones Trigonométricas I

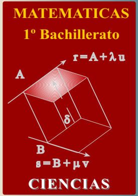
Fco Javier González Ortiz

Directorio

- Tabla de Contenido
- Inicio Artículo

D.L.:SA-1415-2004

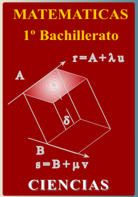
ISBN: 84-688-8267-4



MaTEX

TRIGONO-
METRÍA I

Tabla de Contenido

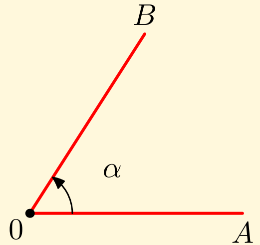


MaTEX

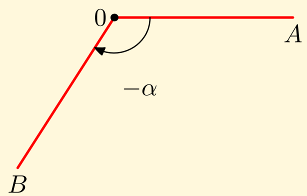
TRIGONO-
METRÍA I

1. Ángulos

Los ángulos se forman siempre que dos segmentos se unen.
Los dos segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ de la figura, que se unen en el punto O, determinan el ángulo $\angle AOB$.
La flecha curva en esta figura sugiere que el ángulo se mide desde segmento $\overline{OA}$, el lado inicial del ángulo, al lado final $\overline{OB}$.

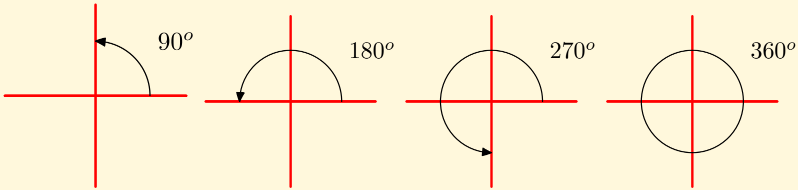


El punto O se llama el vértice de $\angle AOB$.
La orientación de la flecha curva se toma positiva cuando el giro es contrario a las agujas del reloj.
El giro en sentido del reloj se considera como ángulo negativo.



1.1. Ángulo sexagesimal

Se necesita dar una medida a los ángulos. Desde la época de los babilonios se toma una revolución completa como 360° grados sexagesimales.



Quedando dividida una revolución completa en cuatro cuadrantes de 90°. Cada **grado** es igual a $60'$ minutos y cada **minuto** es igual a $60''$ **segundos**.

$$\begin{array}{rcll} 1^\circ & = & 60' & \text{minutos} \\ 1' & = & 60'' & \text{segundos} \end{array}$$

Ejemplo 1.1. Expresar en grados minutos y segundos $34{,}2577^o$.

Solución: Tenemos 34°, con

$$0{,}2577^\circ \times 60 = 15{,}462'$$

y

$$0{,}463' \times 60 = 27{,}462''$$

luego $34{,}2577^\circ \simeq 34^\circ, 15'\, 27''$ □

Ejemplo 1.2. Expresar en grados $80^\circ\, 12'\, 30''$.

Solución: Se convierten los minutos y los segundos a grados

$$80 + \frac{12}{60} + \frac{30}{3600} = 80,20833^\circ$$

$\square$

Ejemplo 1.3. Expresar en grados $120'$ minutos.

Solución: Se convierten los minutos a grados

$$\frac{120'}{60} = 2^\circ$$

$\square$

Ejemplo 1.4. Expresar en grados , minutos y segundos $60{,}5^\circ$.

Solución: Tenemos 60°, con

$$0{,}5^\circ \times 60 = 30'$$

luego $60{,}5^\circ = 60^\circ\, 30'\, 0''$ $\square$

Ejemplo 1.5. Expresar en minutos $120''$ segundos.

Solución: Se convierten los segundos a minutos

$$\frac{120''}{60} = 2'$$

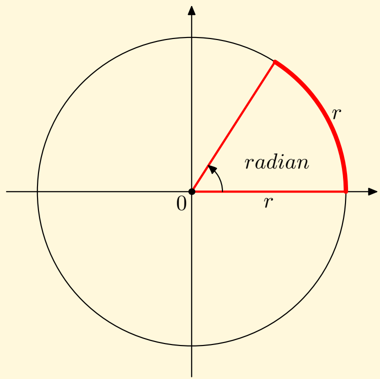
$\square$

1.2. Radianes

Se define radián como el ángulo con centro en O que abarca un radio. Como un ángulo de 360° abarca un arco de circunferencia de $2\pi r$, la tabla muestra la equivalencia entre arcos, grados sexagesimales y radianes.

$$\text{Arco} = \text{ángulo} \times \text{radio}$$

arco	grados sex.	radianes
$2\pi r$	360°	2π
r	$\dfrac{180^\circ}{\pi}$	1
$\dfrac{2\pi r}{360}$	1°	$\dfrac{\pi}{180}$



$$\begin{aligned} 1 \text{ radián} &= \frac{180}{\pi} \text{ grados} \\ 1^\circ &= \frac{\pi}{180} \text{ radianes} \end{aligned}$$

Ejemplo 1.6. Expresar en radianes los grados $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$.

Solución: Como $1^\circ \equiv \dfrac{\pi}{180}$,

$$90^\circ = 90^\circ\,\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{2} \qquad 180^\circ = 180^\circ\,\frac{\pi}{180} = \pi$$

$$270^\circ = 270^\circ\,\frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{2} \qquad 360^o = 360^\circ\,\frac{\pi}{180} = 2\pi$$

□

Ejemplo 1.7. Expresar en grados los radianes $\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{6}$.

Solución: Como $\pi \equiv 180^\circ$,

$$\frac{\pi}{3} = \frac{180}{3} = 60^\circ \qquad \frac{2\pi}{3} = \frac{2\,180}{3} = 120^\circ$$

$$\frac{3\pi}{4} = \frac{3\,180}{4} = 135^\circ \qquad \frac{5\pi}{6} = \frac{5\,180}{3} = 150^\circ$$

□

Ejercicio 1. Expresar en grados los siguientes radianes:

a) $\dfrac{\pi}{4}$ *b*) $\dfrac{2\pi}{3}$ *c*) $\dfrac{3\pi}{2}$ *d*) $\dfrac{3\pi}{4}$

Ejercicio 2. Expresar en radianes los siguientes ángulos en grados:

a) 30° *b*) 45° *c*) 120° *d*) 330°

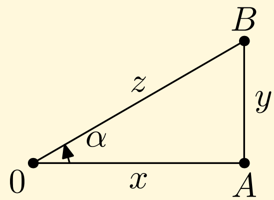
2. Razones trigonométricas

En un triángulo rectángulo de catetos x, y e hipotenusa z se definen las razones trigonométricas del ángulo α, seno, coseno y tangente como:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\textit{hipotenusa}} = \frac{AB}{OB} = \frac{y}{z}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\textit{hipotenusa}} = \frac{0A}{OB} = \frac{x}{z}$$

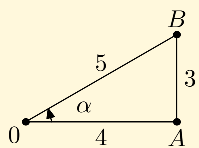
$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{AB}{OA} = \frac{y}{x}$$



A partir de ellas se definen las inversas: cosecante, secante y cotangente:

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{z}{y} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{z}{x} \qquad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{x}{y}$$

Ejercicio 3. Hallar las razones del ángulo α en el triángulo



2.1. Razones trigonométricas de $30°$,$45°$ y $60°$

- **Razones de** 45^o

Para obtener las razones de $45°$ construimos un triángulo rectángulo ABC de catetos iguales

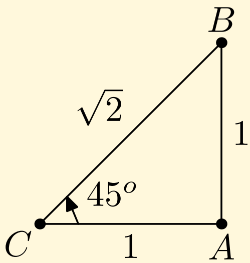
$$AB = AC = 1$$

e hipotenusa

$$BC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Los ángulos son

$$\widehat{A} = 90^o \quad \widehat{B} = \widehat{C} = 45^o$$



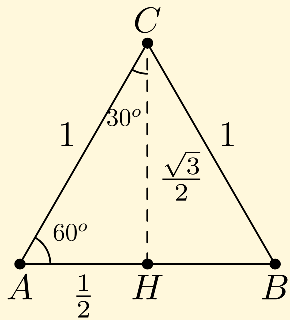
Se tiene así, que

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{sen} 45^o &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos 45^o &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \tan 45^o &= 1 \end{aligned}} \tag{1}$$

- **Razones de 30^o y 60^o**

Para obtener las razones de 30^o y 60^o partimos de un triángulo equilátero ABC de lado

$$AB = AC = BC = 1$$



Al trazar la altura CH se obtiene el triángulo rectángulo AHC de lados

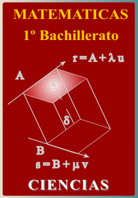
$$AH = \frac{1}{2} \quad AC = 1 \quad CH = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

con los ángulos $\widehat{A} = 60^o$, $\widehat{C} = 30^o$. Se tiene así, que

$$\operatorname{sen} 30^o = \frac{AH}{AC} = \frac{1}{2} \quad \cos 30^o = \frac{CH}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \tan 30^o = \frac{AH}{CH} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Análogamente

$$\operatorname{sen} 60^o = \frac{CH}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos 60^o = \frac{AH}{AC} = \frac{1}{2} \quad \tan 60^o = \frac{CH}{AH} = \sqrt{3}$$



Es conveniente aprenderse las razones trigonométricas de 30^o,45^o y 60^o. Por ello, las resumimos en la siguiente tabla para memorizarlas.

	30^o	45^o	60^o
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Para las razones $\operatorname{cosec}\alpha$, $\sec\alpha$ y $\cot\alpha$, simplemente basta hacer los inversos.

A continuación se proponen dos test para comprobar si el alumno las ha memorizado.

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Inicio del Test Indicar el valor de las razones siguientes:

1. El valor de $\operatorname{sen} 30^o$ es:

(a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\dfrac{1}{2}$ (c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (d) $\sqrt{3}$

2. El valor de $\cos 30^o$ es:

(a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\dfrac{1}{2}$ (c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (d) $\sqrt{3}$

3. El valor de $\tan 30^o$ es:

(a) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (b) $\dfrac{1}{2}$ (c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (d) $\sqrt{3}$

4. El valor de $\operatorname{sen} 60^o$ es:

(a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\dfrac{1}{2}$ (c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (d) $\sqrt{3}$

5. El valor de $\cos 60^o$ es:

(a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\dfrac{1}{2}$ (c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (d) $\sqrt{3}$

6. El valor de $\tan 60^o$ es:

(a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\dfrac{1}{2}$ (c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (d) $\sqrt{3}$

Final del Test Puntos:

Inicio del Test Indicar el valor de las razones siguientes:

1. El valor de $\tan 60^o$ es:

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (d) $\sqrt{3}$

2. El valor de $\tan 45^o$ es:

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) 1 (d) $\sqrt{3}$

3. El valor de $\operatorname{sen} 45^o$ es:

(a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (d) $\sqrt{3}$

4. El valor de $\sec 60^o$ es:

(a) 2 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (d) $\sqrt{3}$

5. El valor de $\operatorname{cosec} 30^o$ es:

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) 2 (c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (d) $\sqrt{3}$

6. El valor de $\sec 30^o$ es:

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) 2 (c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (d) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

Final del Test Puntos:

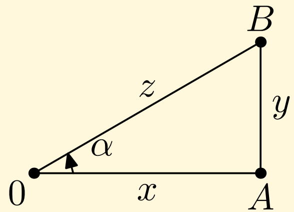
2.2. Fórmula fundamental de trigonometría

A partir de un triángulo rectángulo de catetos x, y e hipotenusa z, el teorema de Pitágoras y la definición dada de las razones trigonométricas del ángulo α, se obtiene la fórmula fundamental de la trigonometría

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Dividiendo por z^2 se tiene

$$\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = 1$$



teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{y}{z}$ y que $\cos\alpha = \dfrac{x}{z}$, sustituyendo se obtiene

$$\boxed{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad (2)}$$

Dividiendo ambos miembros por $\cos^2\alpha$ se obtiene otra relación

$$\boxed{1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha \qquad (3)}$$

3. Ampliación de las razones trigonométricas

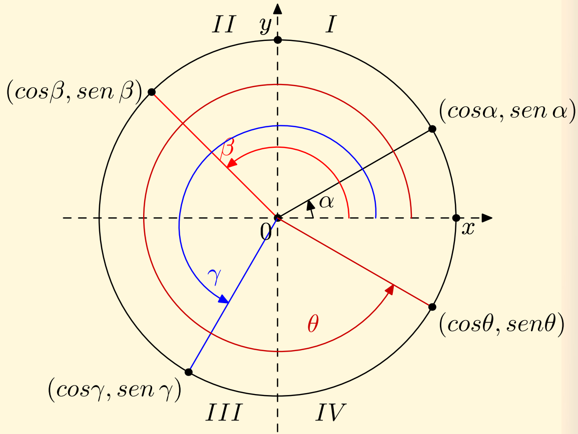
Si comparas la circunferencia de centro O y radio 1 de ecuación

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$$

se ve que todo punto $P(x, y)$ de la circunferencia se puede escribir como $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ para algún ángulo α.

Los ángulos se miden desde el eje Ox en sentido contrario a las agujas del reloj.

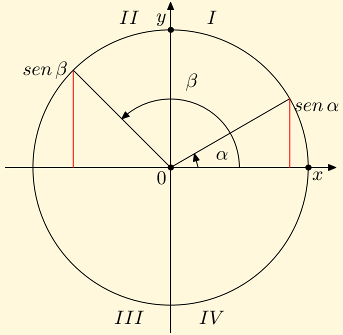
Al dar una revolución completa se recorren todos los puntos de la circunferencia unidad.



De esta forma definimos las razones para los ángulos que no son agudos.

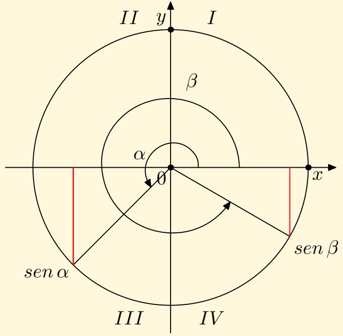
El seno de los ángulos que están en los cuadrantes I y II, al estar en la parte positiva del eje Oy es positivo. Es decir si

$$0 < \alpha < \pi \Longrightarrow \operatorname{sen} \alpha > 0$$



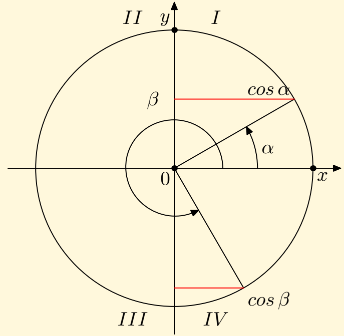
El seno del ángulo que está en los cuadrantes III y IV, al estar en la parte negativa del eje Oy es negativo. Es decir si

$$\pi < \alpha < 2\pi \Longrightarrow \operatorname{sen} \alpha < 0$$



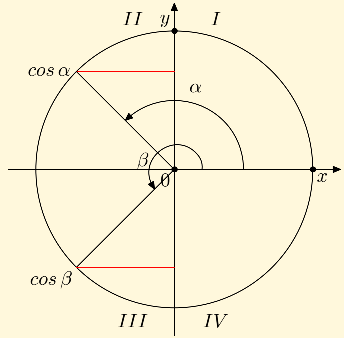
El coseno del ángulo que está en los cuadrantes I y IV, al estar en la parte positiva del eje Ox es positivo. Es decir si

$$\alpha \in I, IV \Longrightarrow \cos\alpha > 0$$



El coseno del ángulo que está en los cuadrantes II y III, al estar en la parte negativa del eje Ox es negativo. Es decir si

$$\alpha \in II, III \Longrightarrow \cos\alpha < 0$$



Inicio del Test Indicar el signo de las razones en los cuadrantes:

1. El signo del seno en el II cuadrante es:

(a) positivo (b) negativo

2. El signo del seno en el III cuadrante es:

(a) positivo (b) negativo

3. El signo del coseno en el II cuadrante es:

(a) positivo (b) negativo

4. El signo del coseno en el IV cuadrante es:

(a) positivo (b) negativo

5. El signo de la tangente en el II cuadrante es:

(a) positivo (b) negativo

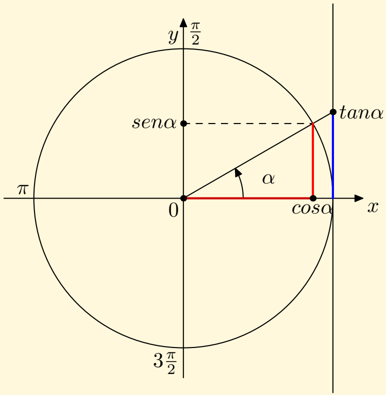
Final del Test Puntos:

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

3.1. Razones de 0^o, 90^o, 180^o y 270^o

A medida que nos desplazamos por el circulo unidad, se obtienen las razones:

	0°	90°	180°	270°
sen	0	1	0	-1
cos	1	0	-1	0
tan	0	$\nexists$	0	$\nexists$



El símbolo $\nexists$ significa que no está definida o no existe. Para las razones $\operatorname{cosec}\alpha$, $\sec\alpha$ y $\cot\alpha$, simplemente basta hacer los inversos.

A continuación se proponen dos test para comprobar si el alumno las ha memorizado.

Inicio del Test Indicar el valor de las razones siguientes:

1. El valor de $\operatorname{sen} 180^o$ es:

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) $\nexists$

2. El valor de $\cos 180^o$ es:

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) $\nexists$

3. El valor de $\tan 180^o$ es:

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) $\nexists$

4. El valor de $\cos 270^o$ es:

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) $\nexists$

5. El valor de $\tan 270^o$ es:

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) $\nexists$

6. El valor de $\cos 90^o$ es:

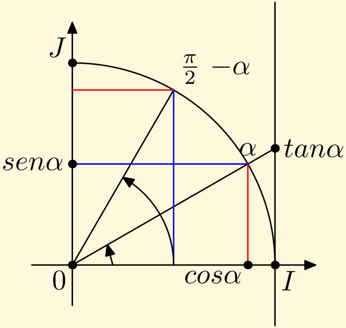
(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) $\nexists$

Final del Test Puntos:

3.2. Razones de ángulos complementarios

En el círculo unidad, de la figura se representa un ángulo α así como su complementario $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

Al ser los ángulos complementarios se observa que el seno de uno de ellos es el coseno del otro y recíprocamente, por ello:



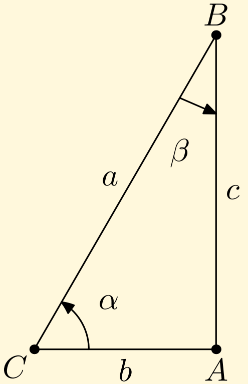
$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos\alpha & \qquad \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sec\alpha \\
\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \operatorname{sen}\alpha & \qquad \sec\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \operatorname{cosec}\alpha \\
\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cot\alpha & \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \tan\alpha
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Las razones de ángulos complementarios, se ven fácilmente en un triángulo rectángulo $\triangle CAB$, ya que para los ángulos agudos se tiene

$$\alpha + \beta = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

De la definición de las razones se comprueban las relaciones anteriores con

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

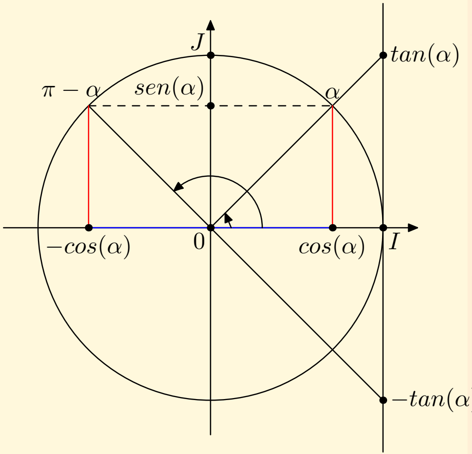


$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{c}{a} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{a} \qquad \tan\alpha = \frac{c}{b}$$
$$\operatorname{sen}\beta = \frac{b}{a} \qquad \cos\beta = \frac{c}{a} \qquad \tan\beta = \frac{b}{c}$$

3.3. Reducción de razones al 1º cuadrante

- **Para ángulos suplementarios**

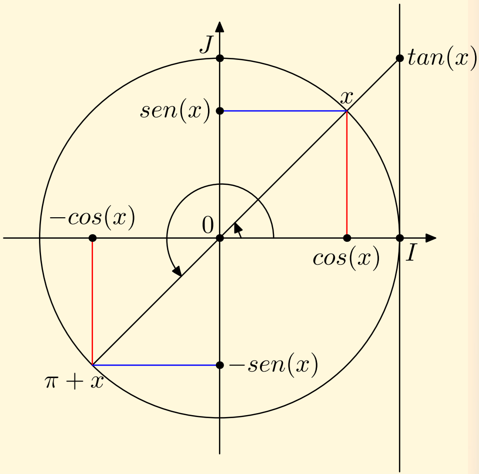
Sobre el círculo unidad, en la figura se representa el ángulo α así como su suplementario $\pi - \alpha$.
Se observa que el seno de ambos coincide en valor y signo, y el coseno y la tangente son de signo contrario



$$\begin{array}{ll} \operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha & \operatorname{cosec}(\pi - \alpha) = \operatorname{cosec} \alpha \\ \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha & \sec(\pi - \alpha) = -\sec \alpha \\ \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha & \cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha \end{array} \tag{5}$$

- **Para ángulos que se diferencian en** $180^0(\pi)$

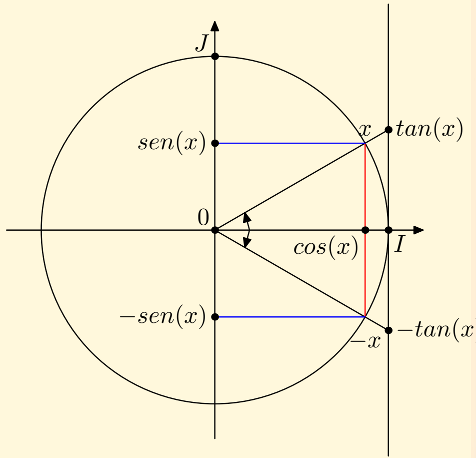
Sobre el círculo unidad, en la figura se representa el ángulo α así como el ángulo $\pi + \alpha$.
Se observa que el seno y el coseno cambian de signo y la tangente lo mantiene.



$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\pi+\alpha) &= -\operatorname{sen}\alpha & \quad \operatorname{cosec}(\pi-\alpha) &= -\operatorname{cosec}\alpha \\ \cos(\pi+\alpha) &= -\cos\alpha & \quad \sec(\pi-\alpha) &= -\sec\alpha \\ \tan(\pi+\alpha) &= \tan\alpha & \quad \cot(\pi-\alpha) &= \cot\alpha \end{aligned} \tag{6}$$

- **Para ángulos opuestos**

Sobre el círculo unidad, en la figura se representa el ángulo α así como su ángulo opuesto $2\pi - \alpha = -\alpha$. Se observa que el coseno de ambos coincide en valor y signo, y el seno y la tangente son de signo contrario.

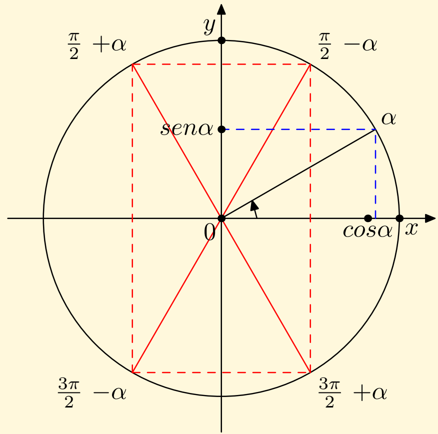


$$
\begin{array}{ll}
\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha & \operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha \\
\cos(-\alpha) = \cos\alpha & \sec(-\alpha) = \sec\alpha \\
\tan(-\alpha) = -\tan\alpha & \cot(-\alpha) = -\cot\alpha
\end{array} \tag{7}
$$

3.4. Resumen

Las razones de los ángulos en rojo en función de $\dfrac{\pi}{2}$ o $\dfrac{3\pi}{2}$, se relacionan con las razones de α de la siguiente forma

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - \alpha) &= \cos\alpha \\
\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + \alpha) &= \cos\alpha \\
\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2} - \alpha) &= -\cos\alpha \\
\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2} + \alpha) &= -\cos\alpha \\
\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) &= \operatorname{sen}\alpha \\
\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) &= -\operatorname{sen}\alpha \\
\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) &= -\operatorname{sen}\alpha \\
\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) &= \operatorname{sen}\alpha
\end{aligned}
$$

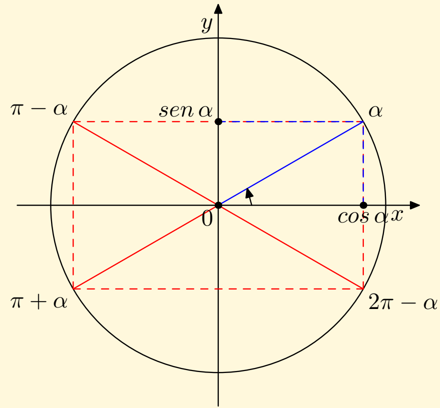


cambian el seno por el coseno y recíprocamente. El signo es el del cuadrante.

MATEMATICAS
1º Bachillerato
CIENCIAS
MaTEX
TRIGONO-METRÍA I
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Las razones de los ángulos en rojo en función de π o $2\,\pi$, se relacionan con las razones de α de la siguiente forma

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\pi-\alpha) &= \operatorname{sen}\alpha \\
\operatorname{sen}(\pi+\alpha) &= -\operatorname{sen}\alpha \\
\operatorname{sen}(2\,\pi-\alpha) &= -\operatorname{sen}\alpha \\
\cos(\pi-\alpha) &= -\cos\alpha \\
\cos(\pi+\alpha) &= -\cos\alpha \\
\cos(2\,\pi-\alpha) &= \cos\alpha
\end{aligned}
$$



Ahora, las razones se conservan. El signo es el del cuadrante.

Ejercicio 4. Calcular las siguientes razones trigonométricas:

(a) $\operatorname{sen} 120^\circ$ (b) $\cos 135^\circ$ (c) $\tan 210^\circ$

Ejemplo 3.1. Aplicamos la regla anterior para reducir las siguientes razones trigonométricas en función de $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{3\pi}{2}$, π o 2π.

Solución:

$$
\begin{array}{rcrcr}
\operatorname{sen}(\dfrac{\pi}{2}-\alpha) & = & \cos\alpha & \lhd & \text{cambia y sen I cuadrante } > 0 \\
\operatorname{sen}(\dfrac{\pi}{2}+\alpha) & = & \cos\alpha & \lhd & \text{cambia y sen II cuadrante } > 0 \\
\cos(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha) & = & -\operatorname{sen}\alpha & \lhd & \text{cambia y cos III cuadrante } < 0 \\
\cos(\pi+\alpha) & = & -\cos\alpha & \lhd & \text{se conserva y cos III cuadrante } < 0 \\
\operatorname{sen}(\pi+\alpha) & = & -\operatorname{sen}\alpha & \lhd & \text{se conserva y sen III cuadrante } < 0 \\
\tan(\pi+\alpha) & = & \tan\alpha & \lhd & \text{se conserva y tan III cuadrante } > 0 \\
\tan(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha) & = & \cot\alpha & \lhd & \text{cambia y tan III cuadrante } > 0 \\
\cos(2\pi-\alpha) & = & \cos\alpha & \lhd & \text{se conserva y cos IV cuadrante } > 0
\end{array}
$$

$\square$

Inicio del Test Indicar el valor de las razones siguientes:

1. El valor de $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ es:

(a) $\operatorname{sen}\alpha$ (b) $-\operatorname{sen}\alpha$ (c) $\cos\alpha$ (d) $-\cos\alpha$

2. El valor de $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)$ es:

(a) $\operatorname{sen}\alpha$ (b) $-\operatorname{sen}\alpha$ (c) $\cos\alpha$ (d) $-\cos\alpha$

3. El valor de $\operatorname{sen}(\pi - \alpha)$ es:

(a) $\operatorname{sen}\alpha$ (b) $-\operatorname{sen}\alpha$ (c) $\cos\alpha$ (d) $-\cos\alpha$

4. El valor de $\cos(\pi - \alpha)$ es:

(a) $\operatorname{sen}\alpha$ (b) $-\operatorname{sen}\alpha$ (c) $\cos\alpha$ (d) $-\cos\alpha$

5. El valor de $\cos(\pi + \alpha)$ es:

(a) $\operatorname{sen}\alpha$ (b) $-\operatorname{sen}\alpha$ (c) $\cos\alpha$ (d) $-\cos\alpha$

Final del Test Puntos:

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Inicio del Test Indicar el valor de las razones siguientes:

1. El valor de $\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$ es:

(a) $\operatorname{sen}\alpha$ (b) $-\operatorname{sen}\alpha$ (c) $\cos\alpha$ (d) $-\cos\alpha$

2. El valor de $\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2} + \alpha)$ es:

(a) $\operatorname{sen}\alpha$ (b) $-\operatorname{sen}\alpha$ (c) $\cos\alpha$ (d) $-\cos\alpha$

3. El valor de $\tan(\pi - \alpha)$ es:

(a) $\tan\alpha$ (b) $-\tan\alpha$ (c) $\cot\alpha$ (d) $-\cot\alpha$

4. El valor de $\tan(\pi + \alpha)$ es:

(a) $\tan\alpha$ (b) $-\tan\alpha$ (c) $\cot\alpha$ (d) $-\cot\alpha$

5. El valor de $\tan(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$ es:

(a) $\tan\alpha$ (b) $-\tan\alpha$ (c) $\cot\alpha$ (d) $-\cot\alpha$

Final del Test Puntos:

MATEMATICAS
1º Bachillerato
CIENCIAS
MaTEX
TRIGONOMETRÍA I
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejemplo 3.2. Reducir al primer cuadrante las razones

$$\operatorname{sen} 150^\circ \quad \cos 240^\circ \quad \cos 100^\circ \quad \tan 300^\circ \quad \tan 120^\circ$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 150^\circ &= \operatorname{sen}(180^\circ - 30^\circ) = \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\cos 240^\circ &= \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2} \\
\cos 100^\circ &= \cos(90^\circ + 10^\circ) = -\operatorname{sen} 10^\circ \\
\tan 300^\circ &= \tan(360^\circ - 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3} \\
\tan 120^\circ &= \tan(90^\circ + 30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}
\end{aligned}$$

□

Ejercicio 5. Reducir al primer cuadrante las razones:

a) $\sec 225^\circ$ *b*) $\cos 300^\circ$ *c*) $\operatorname{sen} 240^\circ$

Ejercicio 6. Reducir al primer cuadrante las razones:

a) $\operatorname{sen} 1500^\circ$ *b*) $\cos 2745^\circ$ *c*) $\tan 2010^\circ$

Ejercicio 7. Reducir al primer cuadrante las razones:

a) $\tan \dfrac{61\,\pi}{3}$ *b*) $\cos \dfrac{37\,\pi}{6}$ *c*) $\tan(-\dfrac{7\,\pi}{3})$

4. Identidades trigonométricas básicas

A partir de la identidad fundamental

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

se observa que conocido el seno o el coseno de un ángulo podemos hallar las demás razones trigonométricas.

Ejemplo 4.1. Si $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{3}{7}$ y α está en el segundo cuadrante, calcula las demás razones trigonométricas de α

Solución: Como

$$\cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - (\frac{3}{7})^2 = \frac{40}{49} \qquad \cos\alpha = \pm\frac{2\sqrt{10}}{7}$$

Al estar α en el segundo cuadrante

$$\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{10}}{7} \qquad \tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{3\sqrt{10}}{20}$$

$\square$

Ejemplo 4.2. Calcula las razones trigonométricas de un ángulo del cuarto cuadrante si $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$

Solución: Como

$$\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - (\frac{3}{5})^2 = \frac{16}{25} \quad \operatorname{sen}\alpha = \pm\frac{4}{5}$$

Al estar α en el cuarto cuadrante

$$\operatorname{sen}\alpha = -\frac{4}{5} \qquad \tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{4}{3}$$

□

Ahora intenta demostrar con el siguiente ejercicio otra identidad importante

Ejercicio 8. A partir de la fórmula fundamental, demuestra la siguiente identidad

$$\boxed{\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha}$$

(Divide por $\cos^2\alpha$)

Ejemplo 4.3. Calcula las razones trigonométricas de un ángulo del tercer cuadrante si $\tan\alpha = \dfrac{4}{3}$

Solución: $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha = 1 + (\frac{4}{3})^2 = \dfrac{25}{9} \quad \sec\alpha = \pm\dfrac{5}{3}$

Al estar α en el tercer cuadrante

$$\sec\alpha = -\frac{5}{3} \qquad \cos\alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \tan\alpha\cdot\cos\alpha = -\frac{4}{5}$$

□

Ejercicio 9. Calcula las razones trigonométricas de un ángulo del segundo cuadrante si $\cot\alpha = -\dfrac{3}{4}$

Ejercicio 10. Calcula las razones trigonométricas de un ángulo del cuarto cuadrante si $\tan\alpha = -\sqrt{2}$

Ejercicio 11. Simplifica las expresiones:

a) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha}$ *b*) $\dfrac{\cos(\pi+\alpha)-\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2}+\alpha)+\cos(\pi-\alpha)}$

Ejercicio 12. Simplifica las expresiones:

a) $\operatorname{sen}^4\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha\,\cos^2\alpha$ *b*) $\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1-\cos\alpha}$

Ejercicio 13. Simplifica las expresiones:

a) $\dfrac{\operatorname{sen}(\pi+\alpha)\,\tan(\frac{\pi}{2}+\alpha)}{\cot(\pi+\alpha)}$ *b*) $\dfrac{\operatorname{sen}(\pi+\alpha)\,\cos(\pi-\alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)\,\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$

Ejercicio 14. Demostrar las siguientes identidades:

(a) $\dfrac{\sec^2\alpha}{\cot\alpha}(1-\operatorname{sen}^2\alpha)\ \operatorname{cosec}^2\alpha = \dfrac{\operatorname{cosec}\alpha}{\cos\alpha}$

(b) $\dfrac{\cos^4\alpha - \operatorname{sen}^4\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\ \cos\alpha} = \dfrac{1-\tan^2\alpha}{\tan\alpha}$

(c) $\cot^4\alpha\ \cos^2\alpha - \cot^2\alpha = -\cos^2\alpha$

(d) $(1-\operatorname{sen}^2\alpha)\dfrac{1}{\cos\alpha}\,\dfrac{1+\cos^2\alpha}{2-\operatorname{sen}^2\alpha}\tan\alpha = \operatorname{sen}\alpha$

(e) $(1+\tan\alpha)\ (1+\cot\alpha) = \dfrac{(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)^2}{\operatorname{sen}\alpha\ \cos\alpha}$

Test. La fórmula fundamental $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ se puede simplificar y obtenemos

$$\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha = 1$$

(a) Verdadero (b) Falso

Ejercicio 15. Demostrar las siguientes identidades:

(a) $\tan\alpha + \cot\alpha = \dfrac{\operatorname{cosec}\alpha}{\cos\alpha}$

(b) $\dfrac{\sec\alpha}{\cot\alpha + \tan\alpha} = \operatorname{sen}\alpha$

(c) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$

(d) $\dfrac{\cos\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{1-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

(e) $\cos^4\alpha - \operatorname{sen}^4\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$

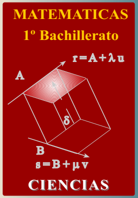
(f) $\dfrac{1-2\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha} = \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha$

Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1. Como $\pi \equiv 180^\circ$,

- $$\frac{\pi}{4} = \frac{180^{\,o}}{4} = 45^\circ$$
- $$\frac{2\pi}{3} = \frac{2 \times 180^{\,o}}{3} = 120^\circ$$
- $$\frac{3\pi}{2} = \frac{3 \times 180^{\,o}}{2} = 270^\circ$$
- $$\frac{3\pi}{4} = \frac{3 \times 180^{\,o}}{4} = 135^\circ$$

Ejercicio 1



Ejercicio 2. Como $1^\circ \equiv \dfrac{\pi}{180}$,

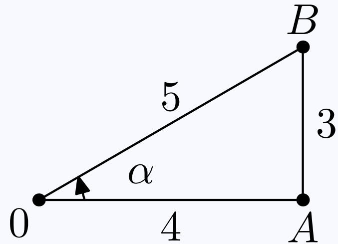
- $$30^\circ \, \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{6} \text{ radianes}$$
- $$45^\circ \, \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{4} \text{ radianes}$$
- $$120^\circ \, \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2\,\pi}{3} \text{ radianes}$$
- $$330^\circ \, \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{11\,\pi}{6} \text{ radianes}$$

Ejercicio 2

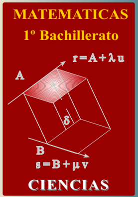
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 3.

$$\operatorname{sen}\alpha = = \frac{AB}{OB} = \frac{3}{5}$$
$$\cos\alpha = = \frac{0A}{OB} = \frac{4}{5}$$
$$\tan\alpha = = \frac{AB}{OA} = \frac{3}{4}$$

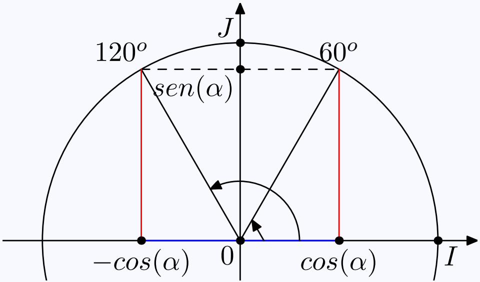


Ejercicio 3



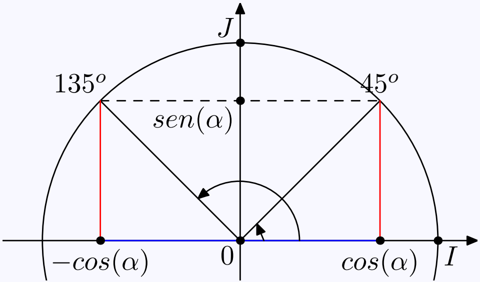
Ejercicio 4(a)

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 120^\circ &= \operatorname{sen}(180^\circ - 60) \qquad (120^\circ \in 2^\circ cuadrante) \\ &= \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$



Ejercicio 4(b)

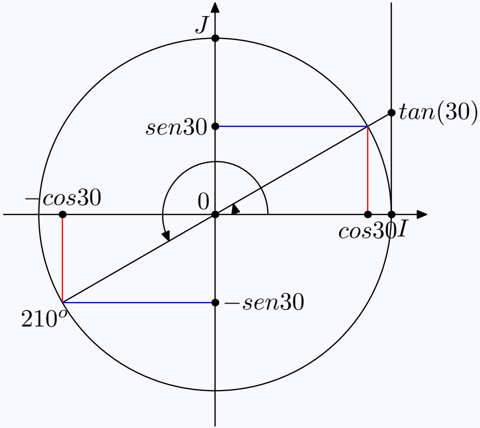
$$\begin{aligned} \cos 135^\circ &= \cos(180^\circ - 45) \qquad\qquad (135^\circ \in 2^{\text{o}} cuadrante) \\ &= -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$



□

Ejercicio 4(c)

$$\begin{aligned}\tan 210^\circ &= \tan(180^\circ + 30) \qquad (210^\circ \in 3^o cuadrante)\\ &= \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$



□

Ejercicio 5. Como $\pi \equiv 180^\circ$,

a)

$$\begin{aligned} \sec 225^\circ &= \sec(180^\circ + 45) \qquad && (225^\circ \in 3^o cuadrante) \\ &= -\sec 45^\circ = -\frac{2}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \cos 330^\circ &= \cos(360^\circ - 30) \qquad && (330^\circ \in 4^o cuadrante) \\ &= \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 240^\circ &= \operatorname{sen}(180^\circ + 60) \qquad && (240^\circ \in 3^o cuadrante) \\ &= -\operatorname{sen} 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Ejercicio 5

Ejercicio 6.

a) Como 1500° es mayor que 360° vemos cuantas vuelta completas abarca. Como $1500 : 360 \simeq 4{,}166$ supera las 4 vueltas y se tiene que

$$1500 - 4 \times 360 = 1500 - 1440 = 60^\circ$$

$$\operatorname{sen} 1500^\circ = \operatorname{sen}(4 \times 360 + 60) = \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) Como 2745° mayor que 360° vemos cuantas vuelta completas abarca. Como $2745 : 360 = 7{,}625$ supera las 7 vueltas y se tiene que

$$2745 - 7 \times 360 = 2745 - 2520 = 225^\circ$$

$$\begin{aligned} \cos 2745^\circ &= \cos 225^\circ = \cos(180 + 45) \qquad (225^\circ \in 3^o cuadrante) \\ &= -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

c) Como 2010° mayor que 360° reducimos al primer giro. Como $2010 : 360 \simeq 5{,}58$, se tiene que

$$2010 - 5 \times 360 = 2010 - 1800 = 210^\circ$$

$$\begin{aligned} \tan 2010^\circ &= \tan 210^\circ = \tan(180 + 30) \qquad (210^\circ \in 3^o cuadrante) \\ &= \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Ejercicio 6

Ejercicio 7. Como $\pi \equiv 180^\circ$,

a) Como $\dfrac{61\,\pi}{3} = 3660^\circ$ mayor que 360° reducimos al primer giro. Como $3660 : 360 \simeq 10{,}16$, se tiene que

$$3660 - 10 \times 360 = 3660 - 3600 = 60^\circ$$

$$\tan 3660^\circ = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

b) Como $\dfrac{37\,\pi}{6} = 1110^\circ$ mayor que 360° reducimos al primer giro. Como $1110 : 360 \simeq 3{,}08$, se tiene que

$$1110 - 3 \times 360 = 1110 - 1080 = 30^\circ$$

$$\cos 1110^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

c) Como $\dfrac{7\,\pi}{3} = 420^\circ$ mayor que 360° reducimos al primer giro. Como

$$420 - 1 \times 360 = 60^\circ$$

$$\begin{aligned} \cos(-420^\circ) &= \cos(360 + 60) \qquad (-420^\circ \in 4^{\mathrm{o}}\mathit{cuadrante}) \\ &= \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ejercicio 7

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 8. Como

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Dividiendo por $\cos^2 \alpha$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

y simplificando se obtiene

$$\tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$$

Ejercicio 8

Ejercicio 9. Como $\cot\alpha = -\dfrac{3}{4} \Longrightarrow \tan\alpha = -\dfrac{4}{3}$ Como

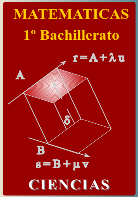
$$\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha = 1 + (\frac{4}{3})^2 = \frac{25}{9} \qquad \sec\alpha = \pm\frac{5}{3}$$

Al estar α en el segundo cuadrante

$$\sec\alpha = -\frac{5}{3} \qquad \cos\alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \tan\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{4}{5}$$

Ejercicio 9



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 10. Como

$$\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha = 1 + (\sqrt{2})^2 = 3 \quad \sec\alpha = \pm\sqrt{3}$$

Al estar α en el cuarto cuadrante

$$\sec\alpha = \sqrt{3} \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \tan\alpha \cdot \cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Ejercicio 10

Ejercicio 11.

a)

$$
\begin{aligned}
\frac{\cos^2\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1-\operatorname{sen}^2\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha} & & \text{for. fundamental}\\
=&\frac{(1+\operatorname{sen}\alpha)(1-\operatorname{sen}\alpha)}{1+\operatorname{sen}\alpha} & \text{dif. de cuadrados}\\
=&1-\operatorname{sen}\alpha & \text{simplif.}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\frac{\cos(\pi+\alpha)-\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2}+\alpha)+\cos(\pi-\alpha)} =& \frac{-\cos\alpha-\cos\alpha}{-\cos\alpha-\cos\alpha}\\
=&1
\end{aligned}
$$

Ejercicio 11

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 12.

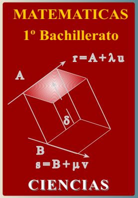
a)

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^4 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha =& \operatorname{sen}^2 \alpha (\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) && \text{factor común} \\ =& \operatorname{sen}^2 \alpha && \text{for. fundamental} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} =& \frac{1 - \cos^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} && \text{for fundamental} \\ =& \frac{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}{1 - \cos \alpha} && \text{dif. cuadrados} \\ =& 1 + \cos \alpha && \text{simplificar} \end{aligned}$$

Ejercicio 12



Ejercicio 13.

a)

$$\frac{\operatorname{sen}(\pi+\alpha)\ \tan(\frac{\pi}{2}+\alpha)}{\cot(\pi+\alpha)} = \frac{(-\operatorname{sen}\alpha)\ (-\cot\alpha)}{\cot\alpha}$$

$$= \operatorname{sen}\alpha$$

b)

$$\frac{\operatorname{sen}(\pi+\alpha)\ \cos(\pi-\alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)\ \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}+\alpha)} = \frac{-\operatorname{sen}\alpha\ (-\cos\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha\ \cos\alpha}$$

$$=1$$

Ejercicio 13

Ejercicio 14(a)

$$\frac{\sec^2\alpha}{\cot\alpha}(1-\operatorname{sen}^2\alpha)\ \operatorname{cosec}^2\alpha = \frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\cos\alpha} \qquad \text{for. fundamental}$$

$$\frac{\sec^2\alpha}{\cot\alpha}(\cos^2\alpha)\ \operatorname{cosec}^2\alpha = \frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\cos\alpha} \qquad \text{simplif.}$$

$$\frac{1}{\cot\alpha}\ \operatorname{cosec}^2\alpha = \frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cot\alpha = \frac{\cos}{\operatorname{sen}}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\ \operatorname{cosec}^2\alpha = \frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\cos\alpha}$$

□

Ejercicio 14(b)

$$
\begin{aligned}
\frac{\cos^4\alpha-\operatorname{sen}^4\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\ \cos\alpha} &= \frac{1-\tan^2\alpha}{\tan\alpha}\\
\frac{(\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha)(\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha\ \cos\alpha} &= \frac{1-\tan^2\alpha}{\tan\alpha}\\
\frac{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\ \cos\alpha} &= \frac{1-\tan^2\alpha}{\tan\alpha}\\
\frac{1-\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha\ \frac{\cos\alpha}{\cos^2\alpha}} &= \frac{1-\tan^2\alpha}{\tan\alpha}\\
\frac{1-\tan^2\alpha}{\tan\alpha} &= \frac{1-\tan^2\alpha}{\tan\alpha}
\end{aligned}
$$

$\square$

Ejercicio 14(c)

$$\begin{aligned}
\cot^4\alpha\ \cos^2\alpha - \cot^2\alpha &= -\cos^2\alpha \\
\cot^2\alpha\ (\cos^2\alpha - 1) &= -\cos^2\alpha \\
-\cot^2\alpha\ \operatorname{sen}^2\alpha &= -\cos^2\alpha \\
-\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}\ \operatorname{sen}^2\alpha &= -\cos^2\alpha \\
-\cos^2\alpha &= -\cos^2\alpha
\end{aligned}$$

$\square$

Ejercicio 14(d)

$$
\begin{aligned}
(1-\operatorname{sen}^2\alpha)\frac{1}{\cos\alpha}\,\frac{1+\cos^2\alpha}{2-\operatorname{sen}^2\alpha}\tan\alpha &= \operatorname{sen}\alpha\\
\cos^2\alpha\frac{1}{\cos\alpha}\,\frac{1+\cos^2\alpha}{2-\operatorname{sen}^2\alpha}\tan\alpha &= \operatorname{sen}\alpha\\
\cos\alpha\frac{1+\cos^2\alpha}{2-\operatorname{sen}^2\alpha}\tan\alpha &= \operatorname{sen}\alpha\\
\frac{1+\cos^2\alpha}{2-\operatorname{sen}^2\alpha}\operatorname{sen}\alpha &= \operatorname{sen}\alpha\\
\frac{1+(1-\operatorname{sen}^2\alpha)}{2-\operatorname{sen}^2\alpha}\operatorname{sen}\alpha &= \operatorname{sen}\alpha\\
\operatorname{sen}\alpha &= \operatorname{sen}\alpha
\end{aligned}
$$

$\square$

Ejercicio 14(e)

$$(1+\tan\alpha)\,(1+\cot\alpha) = \frac{(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)^2}{\operatorname{sen}\alpha\ \cos\alpha}$$

$$(1+\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha})\,(1+\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}) = \frac{(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)^2}{\operatorname{sen}\alpha\ \cos\alpha}$$

$$(\frac{\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha})\,(\frac{\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}) = \frac{(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)^2}{\operatorname{sen}\alpha\ \cos\alpha}$$

$$\frac{(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)^2}{\operatorname{sen}\alpha\ \cos\alpha} = \frac{(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)^2}{\operatorname{sen}\alpha\ \cos\alpha}$$

$\square$

Ejercicio 15(a)

$$
\begin{aligned}
\tan\alpha + \cot\alpha &= \frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\cos\alpha} && \text{definición}\\
\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} &= \frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\cos\alpha} && \text{operamos}\\
\frac{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha} &= \frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\cos\alpha} && \text{for. fundamental}\\
\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha} &= \frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\cos\alpha} && \text{definición}\\
\frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\cos\alpha} &= \frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\cos\alpha}
\end{aligned}
$$

$\square$

Ejercicio 15(b)

$$\frac{\sec\alpha}{\cot\alpha+\tan\alpha}=\operatorname{sen}\alpha \qquad \text{operando}$$

$$\sec\alpha=\operatorname{sen}\alpha(\cot\alpha+\tan\alpha) \qquad \text{definición}$$

$$\sec\alpha=\operatorname{sen}\alpha\left(\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}+\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right) \qquad \text{operando}$$

$$\sec\alpha=\operatorname{sen}\alpha\left(\frac{\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}\right) \qquad \text{for fundamental}$$

$$\sec\alpha=\operatorname{sen}\alpha\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}\right) \qquad \text{simplicando}$$

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha} \qquad \text{definición}$$

□

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 15(c)

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha} &= \frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} && \text{operando} \\ \operatorname{sen}^2\alpha &= 1-\cos^2\alpha && \text{for. fundamental} \\ \operatorname{sen}^2\alpha &= \operatorname{sen}^2\alpha \end{aligned}$$

$\square$

Ejercicio 15(d)

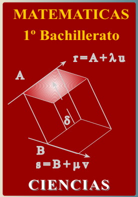
$$\begin{aligned}\frac{\cos\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha} &= \frac{1-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} && \text{operando}\\ \cos^2\alpha &= 1-\operatorname{sen}^2\alpha && \text{for. fundamental}\\ \cos^2\alpha &= \cos^2\alpha\end{aligned}$$

$\square$

Ejercicio 15(e)

$$
\begin{aligned}
\cos^4\alpha - \operatorname{sen}^4\alpha &= 1 - 2\,\operatorname{sen}^2\alpha && \text{dif. cuadrados}\\
(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha) &= 1 - 2\,\operatorname{sen}^2\alpha && \text{for. fundamental}\\
\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha &= 1 - 2\,\operatorname{sen}^2\alpha && \text{definición}\\
1 - \operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha &= 1 - 2\,\operatorname{sen}^2\alpha && \text{definición}
\end{aligned}
$$

$\square$



Ejercicio 15(f)

$$\begin{aligned}
\frac{1-2\,\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha} &= \operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha && \text{operando}\\
1-2\,\operatorname{sen}^2\alpha &= (\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha)(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha) && \text{operando}\\
1-2\,\operatorname{sen}^2\alpha &= \cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha && \text{for. fundamental}\\
1-2\,\operatorname{sen}^2\alpha &= 1-\ \operatorname{sen}^2-\operatorname{sen}^2\alpha
\end{aligned}$$

$\square$

Soluciones a los Tests

Solución al Test: Es falso pues

$$\sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha} \neq \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha$$

basta ver que

$$\sqrt{4^2+9^2} = \sqrt{25} = 5 \neq \sqrt{4^2} + \sqrt{9^2} = 4 + 9 = 13$$

Final del Test

Índice alfabético

Proyecto MaTEX

Razones Trigonométricas II

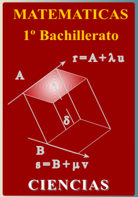
Fco Javier González Ortiz

Directorio

- Tabla de Contenido
- Inicio Artículo

D.L.:SA-1415-2004

ISBN: 84-688-8267-4



MaTEX

Trigono-metría II

Tabla de Contenido

1. Razones trigonométricas de ..

1.1. Suma de ángulos

Se trata de calcular las razones de $(\alpha+\beta)$ en función de las razones de α y β.

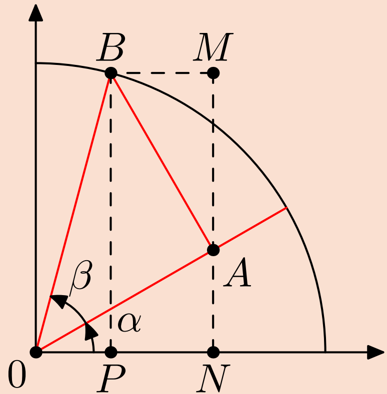
En la figura se tiene que

$OA = \cos\beta \qquad AB = \operatorname{sen}\beta$

Se tiene así, que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha+\beta) =& PB = NM\\ =& NA + AM\\ =& OA \operatorname{sen}\alpha + AB \cos\alpha\\ =& \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) =& OP = ON - PN\\ =& ON - BM\\ =& OA \cos\alpha - AB \operatorname{sen}\alpha\\ =& \cos\beta \cos\alpha - \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\alpha\end{aligned}$$



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Para calcular la $\tan(\alpha+\beta)$ realizamos el cociente del seno entre el coseno

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha+\beta) =& \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} \\
=& \frac{\operatorname{sen}\alpha\,\cos\beta+\cos\alpha\,\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\,\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\,\operatorname{sen}\beta} \\
=& (\text{dividiendo por }\cos\alpha\,\cos\beta) \\
=& \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\,\tan\beta}
\end{aligned}$$

Razones de la suma de ángulos

$$\boxed{\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha+\beta) =& \quad \operatorname{sen}\alpha\,\cos\beta+\cos\alpha\,\operatorname{sen}\beta \\
\cos(\alpha+\beta) =& \quad \cos\beta\,\cos\alpha-\operatorname{sen}\beta\,\operatorname{sen}\alpha \\
\tan(\alpha+\beta) =& \quad \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\,\tan\beta}
\end{aligned}} \tag{1}$$

MATEMATICAS
1º Bachillerato
CIENCIAS

MaTEX

Trigono-
metría II

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejemplo 1.1. A partir de 30^o y 45^o obtener el valor exacto de $\operatorname{sen} 75^o$,$\cos 75^o$ y $\tan 75^o$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 75^o = \operatorname{sen}(30+45) =& \operatorname{sen} 30\ \cos 45 + \cos 30\ \operatorname{sen} 45 \\
=& \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \\
=& \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos 75^o = \cos(30+45) =& \cos 30\ \cos 45 - \operatorname{sen} 30\ \operatorname{sen} 45 \\
=& \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \\
=& \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tan 75^o = \tan(30+45) =& \frac{\tan 30 + \tan 45}{1-\tan 30\ \tan 45} \\
=& \frac{(1/\sqrt{3})+1}{1-(1/\sqrt{3})} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}
\end{aligned}$$

□

MATEMATICAS
1º Bachillerato
CIENCIAS
MaTEX
TRIGONOMETRÍA II
Doc Doc
Volver Cerrar

1.2. Diferencia de ángulos

Utilizando las razones de los ángulos opuestos y utilizando las fórmulas para la suma de ángulos se obtiene:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= \operatorname{sen}[\alpha+(-\beta)] \\
&= \operatorname{sen}\alpha\ \cos(-\beta)+\cos\alpha\ \operatorname{sen}(-\beta) \\
&= \operatorname{sen}\alpha\ \cos\beta-\cos\alpha\ \operatorname{sen}\beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha-\beta) &= \cos[\alpha+(-\beta)] \\
&= \cos\alpha\ \cos(-\beta)-\operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}(-\beta) \\
&= \cos\alpha\ \cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha-\beta) &= \tan[\alpha+(-\beta)] \\
&= \frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\ \tan(-\beta)} \\
&= \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\ \tan\beta}
\end{aligned}$$

La diferencia de ángulos

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= \operatorname{sen}\alpha\,\cos\beta-\cos\alpha\,\operatorname{sen}\beta \\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\beta\,\cos\alpha+\operatorname{sen}\beta\,\operatorname{sen}\alpha \\ \tan(\alpha-\beta) &= \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\,\tan\beta} \end{aligned}} \tag{2}$$

Ejemplo 1.2. A partir de 30^o y 45^o hallar $\operatorname{sen}15^o$ y $\cos 15^o$.

Solución:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}15^o = \operatorname{sen}(45-30) &= \operatorname{sen}45\,\cos30-\cos45\,\operatorname{sen}30 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \cos15^o = \cos(45-30) &= \cos45\,\cos30+\operatorname{sen}30\,\operatorname{sen}45 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

□

1.3. El ángulo doble

A partir de las razones de la suma obtenemos:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(2\,\alpha) &= \operatorname{sen}[\alpha+\alpha] = \operatorname{sen}\alpha\,\cos\alpha + \cos\alpha\,\operatorname{sen}\alpha \\ &= 2\,\operatorname{sen}\alpha\,\cos\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(2\,\alpha) &= \cos[\alpha+\alpha] = \cos\alpha\,\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha\,\operatorname{sen}\alpha \\ &= \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan(2\,\alpha) &= \tan[\alpha+\alpha] = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1-\tan\alpha\,\tan\alpha} \\ &= \frac{2\,\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\end{aligned}$$

Razones del ángulo doble

$$\boxed{\begin{aligned}\operatorname{sen}(2\,\alpha) &= 2\,\operatorname{sen}\alpha\,\cos\alpha \\ \cos(2\,\alpha) &= \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha \\ \tan(2\,\alpha) &= \frac{2\,\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\end{aligned}} \quad (3)$$

MATEMATICAS
1º Bachillerato
CIENCIAS
MaTEX
Trigonometría II
Doc Doc
Volver Cerrar

Ejemplo 1.3. A partir de las razones de 60^o hallar $\operatorname{sen} 120^o$ y $\cos 120^o$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 120^o = \operatorname{sen}(2 \cdot 60) =& 2\ \operatorname{sen} 60\ \cos 60 \\
=& 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\cos 120^o = \cos(2 \cdot 60) =& \cos^2 60 - \operatorname{sen}^2 60 \\
=& \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.4. Si α está en el tercer cuadrante y $\cos\alpha = -\dfrac{1}{2}$, obtener el valor de $\operatorname{sen} 2\,\alpha$ y $\cos 2\,\alpha$.

Solución: Primero calculamos $\operatorname{sen}\alpha$

$$\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - (\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4} \Longrightarrow \operatorname{sen}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 2\,\alpha =& 2\ \operatorname{sen}\alpha\ \cos\alpha = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\cos 2\,\alpha =& \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

□

1.4. Ángulo mitad

A partir del coseno del ángulo doble se tiene

$$\cos 2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} \tag{4}$$

$$\cos\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} \tag{5}$$

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 \tag{6}$$

Despejando en las dos ultimas expresiones obtenemos las razones del seno y coseno para el ángulo mitad

$$\boxed{\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}} \tag{7}$$

$$\boxed{\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}} \tag{8}$$

Dividiendo las dos expresiones anteriores

$$\boxed{\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \tag{9}$$

Ejemplo 1.5. Con el ángulo mitad obtener el valor exacto de $\operatorname{sen} 15^o$, $\cos 15^o$ y $\tan 15^o$.

Solución:

$$\operatorname{sen}^2 15^o = \frac{1-\cos 30}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \Longrightarrow \operatorname{sen} 15^o = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

$$\cos^2 15^o = \frac{1+\cos 30}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \Longrightarrow \cos 15^o = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$$

$$\tan^2 15^o = \frac{1-\cos 30}{1+\cos 30} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} \Longrightarrow \tan 15^o = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$$

$\square$

Ejercicio 1. Si α está en el tercer cuadrante y $\cos\alpha = -\dfrac{1}{5}$, obtener el valor de $\operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2}$, $\cos\dfrac{\alpha}{2}$ y $\tan\dfrac{\alpha}{2}$.

2. Ecuaciones trigonométricas

Llamamos ecuación trigonométrica a una ecuación con razones trigonométricas, donde se pretende calcular el ángulo incógnita α. No hay un método general de resolución pero podemos indicar algunas pautas de resolución, como:

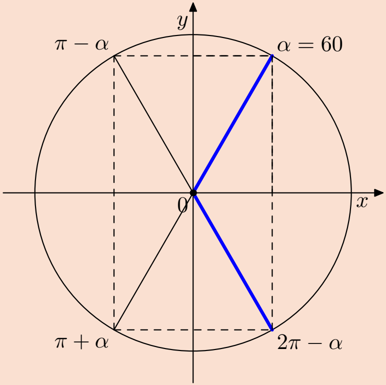
- Sacar factor común cuando el término independiente es cero.
- Procurar que todas las razones tengan el mismo ángulo.
- Y procurar obtener la misma razón trigonométrica

Ejemplo 2.1. Resolver la ecuación $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$

Solución: Conocemos que $\cos 60^o = \dfrac{1}{2}$.
Dibujamos un aspa como el de la figura a partir de 60^o y obtenemos las soluciones entre 0 y 360.
A estas soluciones se le añaden un múltiplo cualquiera de vueltas con la expresión $360^o\, k$, siendo k un número entero.

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \alpha & = 60^o + 360^o\, k \\ \alpha & = 300^o + 360^o\, k \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \alpha & = \boxed{\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi} \\ \alpha & = \boxed{\dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi} \end{array} \right.$$



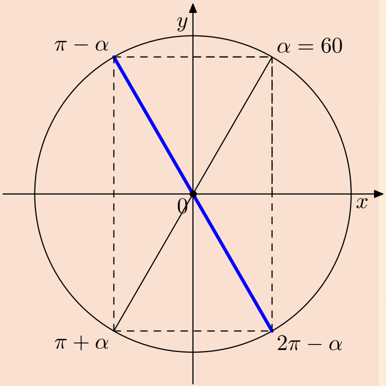
Las soluciones las puedes expresar en grados o en radianes $\square$

Ejemplo 2.2. Resolver la ecuación $\tan\alpha = -\sqrt{3}$

Solución: Conocemos que $\tan 60^o = \sqrt{3}$.
Dibujamos un aspa como el de la figura a partir de 60^o y obtenemos las soluciones entre 0 y 360.

$$\tan\alpha = -\sqrt{3} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha &= 120^o + 360^o\,k \\ \alpha &= 300^o + 360^o\,k \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha &= \boxed{\dfrac{2\,\pi}{3} + 2\,k\pi} \\ \alpha &= \boxed{\dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi} \end{cases}$$



En este caso como entre dos soluciones consecutivas hay 180^o, todas las soluciones se pueden expresar de la forma

$$\alpha = \boxed{\frac{2\,\pi}{3} + k\pi}$$

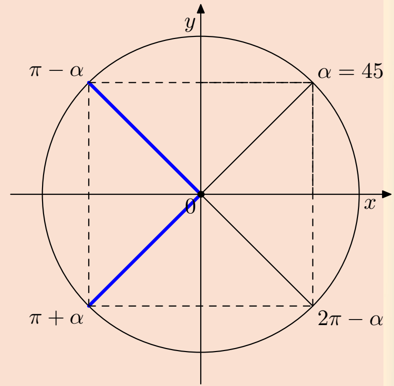
□

Ejemplo 2.3. Resolver la ecuación $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Solución: Conocemos que $\cos 45^o = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Dibujamos un aspa como el de la figura a partir de 45^o y obtenemos las soluciones entre 0 y 360 donde el coseno es negativo

$$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha &= 135^o + 360^o\,k \\ \alpha &= 225^o + 360^o\,k \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha &= \boxed{\dfrac{3\,\pi}{4} + 2\,k\pi} \\ \alpha &= \boxed{\dfrac{5\,\pi}{4} + 2k\pi} \end{cases}$$



$\square$

Ejercicio 2. Resolver las ecuaciones trigonométricas:

a) $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{1}{2}$ *b*) $\operatorname{sen} 2\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *c*) $\cos 3\alpha = \dfrac{1}{2}$

Ejercicio 3. Resolver las ecuaciones trigonométricas:

a) $\cos 2\alpha = -\dfrac{1}{2}$ *b*) $\tan \dfrac{\alpha}{4} = 1$ *c*) $\cot(\alpha - \pi) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Ejercicio 4. Resolver las ecuaciones trigonométricas:

a) $\sec 2\,\alpha = 2$ *b*) $\operatorname{sen} x = \sqrt{3}\,\cos x$ *c*) $\operatorname{sen}(2\,\alpha - 135^o) = 0$

Ejercicio 5. Resolver las ecuaciones trigonométricas:

a) $\tan 3\,\alpha = -1$ *b*) $\operatorname{cosec}^2 \dfrac{\alpha}{4} = 1$ *c*) $2\,\cos 2\,\alpha = \sqrt{3}$

EJERCICIO 6. Resolver las ecuaciones trigonométricas:

(a) $\operatorname{sen} 2\alpha = \operatorname{sen}\alpha$

(b) $\cos 2\alpha = \cos\alpha$

(c) $\operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha$

(d) $\cos\alpha = \cot\alpha$

(e) $\tan\alpha = 2\,\operatorname{sen}\alpha$

(f) $\operatorname{sen}\alpha + \sqrt{3}\,\cos\alpha = 0$

(g) $2\,\operatorname{sen}(\alpha - 30^o) = -1$

(h) $\operatorname{sen} 2\alpha\,\operatorname{cosec}\alpha = \tan\alpha + \sec\alpha$

Ejercicio 7. Resolver las ecuaciones trigonométricas:

(a) $2 - \operatorname{sen} x = \cos^2 x + 7 \operatorname{sen}^2 x$

(b) $2 \operatorname{sen}^2 x + 3 \cos x = 0$

(c) $\operatorname{sen} x + \cos x = 1$

(d) $\operatorname{sen}^2 x + \cos x + 1 = 0$

(e) $\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2}$

(f) $\operatorname{sen} 2x - 2 \operatorname{sen} 4x = 0$

(g) $2 \ \operatorname{sen}(\alpha - 30^o) = -1$

(h) $\operatorname{sen} 2\alpha \ \operatorname{cosec} \alpha = \tan \alpha + \sec \alpha$

3. Ampliación

3.1. Suma y diferencia de senos

Del seno de la suma y diferencia de ángulos :

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \operatorname{sen}\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\ \operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= \operatorname{sen}\alpha\ \cos\beta - \cos\alpha\ \operatorname{sen}\beta\end{aligned}$$

Si sumamos y restamos las dos identidades obtenemos

$$\boxed{\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= 2\ \operatorname{sen}\alpha\ \cos\beta \\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= 2\ \cos\alpha\ \operatorname{sen}\beta\end{aligned}} \qquad (10)$$

Si llamamos $A=\alpha+\beta$ y $B=\alpha-\beta$ las anteriores identidades son:

$$\boxed{\begin{aligned}\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B &= 2\ \operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\ \cos\frac{A-B}{2} \\ \operatorname{sen}A-\operatorname{sen}B &= 2\ \cos\frac{A+B}{2}\ \operatorname{sen}\frac{A-B}{2}\end{aligned}} \qquad (11)$$

3.2. Suma y diferencia de cosenos

Del seno de la suma y diferencia de ángulos :

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\,\operatorname{sen}\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\,\operatorname{sen}\beta$$

Si sumamos y restamos las dos identidades obtenemos

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) &= \;\; 2\;\cos\alpha\,\cos\beta \\ \cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta) &= \;\; -2\;\operatorname{sen}\alpha\,\operatorname{sen}\beta \end{aligned}} \tag{12}$$

Si llamamos $A=\alpha+\beta$ y $B=\alpha-\beta$ las anteriores identidades son:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos A+\cos B &= \;\; 2\;\cos\frac{A+B}{2}\,\cos\frac{A-B}{2} \\ \cos A-\cos B &= \;\; -2\;\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\,\operatorname{sen}\frac{A-B}{2} \end{aligned}} \tag{13}$$

Ejemplo 3.1. Convertir en productos las expresiones.

a) $\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x$

b) $\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x$

c) $\cos 3x + \cos x$

d) $\cos 3x - \cos x$

e) $\cos 4x + \cos 2x$

f) $\cos 4x - \cos 2x$

g) $\cos 4x + \cos 2y$

h) $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2y$

Solución:

a) $\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} 2x \cos x$

b) $\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x = 2 \cos 2x \operatorname{sen} x$

c) $\cos 3x + \cos x = 2 \cos 2x \cos x$

d) $\cos 3x - \cos x = -2 \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x$

e) $\cos 4x + \cos 2x = 2 \cos 3x \cos x$

f) $\cos 4x - \cos 2x = -2 \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} x$

g) $\cos 4x + \cos 2y = 2 \cos(2x + y) \cos(2x - y)$

h) $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2y = 2 \operatorname{sen}(x + y) \cos(x - y)$

$\square$

3.3. Ejercicios

Ejercicio 8. Simplificar las siguientes expresiones:

(a) $\dfrac{1-\cos 2\,\alpha}{\cos^2\alpha}$ (b) $\dfrac{1+\cos 2\,\alpha}{\cos^2\alpha}$

(c) $\dfrac{1-\cos 2\,\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}$ (d) $\dfrac{\cos 2\,\alpha}{\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha}$

Ejercicio 9. Simplificar las siguientes expresiones:

(a) $\operatorname{sen}(45+\beta)+\cos(45+\beta)$

(b) $\operatorname{sen}(30+\beta)+\cos(60+\beta)$

(c) $\operatorname{sen}(30+x)+\operatorname{sen}(30-x)$

(d) $\cos(30+x)-\cos(30-x)$

Ejercicio 10. Demostrar la siguiente identidad:

$$\frac{\operatorname{sen}3x}{\operatorname{sen}x}-\frac{\cos 3x}{\cos x}=2$$

Ejercicio 11. Si $\tan 2\alpha=\dfrac{2}{3}$ y α es del 3^{o} cuadrante, hallar $\tan\alpha$

Ejercicio 12. ¿Existe algún ángulo menor de 360^o cuya tangente sea igual a su cotangente?

Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1. Si α está en el tercer cuadrante, $\alpha/2$ está en el segundo cuadrante

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{1+\frac{1}{5}}{2} \Longrightarrow \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} = \frac{1-\frac{1}{5}}{2} \Longrightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$\tan 15^o = \frac{\operatorname{sen} 15}{\cos 15} = -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Ejercicio 1

Ejercicio 2.

a)

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \alpha & = 30^o + 2k\pi \\ \alpha & = 150^o + 2k\pi \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} \alpha & = & \boxed{\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi} \\ \alpha & = & \boxed{\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi} \end{array} \right.$$

b)

$$\operatorname{sen} 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 2\alpha & = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ 2\alpha & = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} \alpha & = & \boxed{\dfrac{\pi}{6} + k\pi} \\ \alpha & = & \boxed{\dfrac{\pi}{3} + k\pi} \end{array} \right.$$

c)

$$\cos 3\alpha = \frac{1}{2} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 3\alpha & = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ 3\alpha & = \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} \alpha & = & \boxed{\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2k\pi}{3}} \\ \alpha & = & \boxed{\dfrac{5\pi}{9} + \dfrac{2k\pi}{3}} \end{array} \right.$$

Ejercicio 2

Ejercicio 3.

a)

$$\cos 2\alpha = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2\alpha & = & \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ 2\alpha & = & \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & \boxed{\dfrac{\pi}{3} + k\pi} \\ \alpha & = & \boxed{\dfrac{2\pi}{3} + k\pi} \end{array} \right.$$

b)

$$\tan \frac{\alpha}{4} = 1 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\alpha}{4} & = & \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \dfrac{\alpha}{4} & = & \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & \boxed{\pi + 8k\pi} \\ \alpha & = & \boxed{5\pi + 8k\pi} \end{array} \right.$$

c) $\cot(\alpha - \pi) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$\tan(\alpha - \pi) = -\sqrt{3} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha - \pi & = & \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \alpha - \pi & = & \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & \boxed{\dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi} \\ \alpha & = & \boxed{\dfrac{8\pi}{3} + 2k\pi} \end{array} \right.$$

Ejercicio 3

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 4.

a) $\sec 2\,\alpha = 2$

$$\cos 2\,\alpha = \frac{1}{2} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 2\,\alpha & = 60^o + 2k\pi \\ 2\,\alpha & = 300^o + 2k\pi \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \alpha & = \boxed{\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi} \\ \alpha & = \boxed{\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi} \end{array} \right.$$

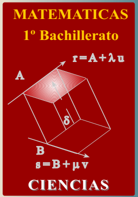
b)

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{3}\,\cos x \Rightarrow \tan x = \sqrt{3} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x & = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x & = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{array} \right.$$

c)

$$\operatorname{sen}(2\,\alpha - 135^o) = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 2\,\alpha - 135^o & = 0 + 2k\pi \\ 2\,\alpha - 135^o & = \pi + 2k\pi \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{ll} \alpha & = \boxed{\dfrac{3\pi}{8} + k\,\pi} \\ \alpha & = \boxed{\dfrac{7\pi}{8} + k\,\pi} \end{array} \right.$$

Ejercicio 4



Ejercicio 5.

a)

$$\tan 3\,\alpha = -1 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 3\alpha & = & \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ 3\alpha & = & \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & \boxed{\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2\,k\,\pi}{3}} \\ \alpha & = & \boxed{\dfrac{7\pi}{12} + \dfrac{2\,k\,\pi}{3}} \end{array} \right.$$

b) $\operatorname{cosec}^2 \dfrac{\alpha}{4} = 1$

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{4} = \pm 1 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\alpha}{4} & = & \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \dfrac{\alpha}{4} & = & \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & \boxed{2\,\pi + 8\,k\,\pi} \\ \alpha & = & \boxed{6\,\pi + 8\,k\,\pi} \end{array} \right.$$

c) $2\,\cos 2\,\alpha = \sqrt{3}$

$$\cos 2\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2\,\alpha & = & \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2\,\alpha & = & \dfrac{10\pi}{3} + 2k\pi \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & \boxed{\dfrac{\pi}{12} + k\,\pi} \\ \alpha & = & \boxed{\dfrac{5\pi}{3} + k\,\pi} \end{array} \right.$$

Ejercicio 5

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 6(a)
Utilizamos el seno del ángulo doble y sacamos factor común:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2\alpha &= \operatorname{sen}\alpha \\ 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha &= \operatorname{sen}\alpha \\ 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha &= 0 \\ \operatorname{sen}\alpha\,(2 \cos\alpha - 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{sen}\alpha & = 0 \\ \cos\alpha & = \dfrac{1}{2} \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} \alpha & = \boxed{0 + k\pi} & \\ \alpha & = \boxed{\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi} & \boxed{\dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi} \end{array} \right.$$

□

Ejercicio 6(b)
Utilizamos el coseno del ángulo doble, pasando todo a cosenos y resolvemos la ecuación:

$$\begin{aligned}
\cos 2\alpha &= \cos\alpha \\
\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha &= \cos\alpha \\
\cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) &= \cos\alpha \\
2\cos^2\alpha - \cos\alpha - 1 &= 0
\end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \cos\alpha & = 1 \\ \cos\alpha & = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \alpha & = \boxed{0+2k\pi} \\ \alpha & = \boxed{\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi} \quad \boxed{\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi} \end{array}\right.$$

□

Ejercicio 6(c)

Expresamos el coseno en función del seno, elevamos al cuadrado y resolvemos la ecuación:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\alpha &= \cos\alpha \\
\operatorname{sen}\alpha &= \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} \\
\operatorname{sen}^2\alpha &= 1-\operatorname{sen}^2\alpha \\
2\ \operatorname{sen}^2\alpha &= 1 \\
\operatorname{sen}\alpha &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \operatorname{sen}\alpha & = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen}\alpha & = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{llll} \alpha & = & \boxed{\dfrac{\pi}{4}+2k\pi} & \dfrac{3\pi}{4}+2k\pi \\ \alpha & = & \boxed{\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi} & \dfrac{7\pi}{4}+2k\pi \end{array}\right.$$

Las que no tienen recuadro son del segundo y cuarto cuadrante que no cumplen la ecuación inicial. Esto suele ocurrir cuando se eleva al cuadrado o hay denominadores

□

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 6(d)
Utilizamos la definición de la cotangente, operamos y sacamos factor común:

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \cot\alpha \\
\cos\alpha &= \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \\
\cos\alpha\,\operatorname{sen}\alpha &= \cos\alpha \\
\cos\alpha\,\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha &= 0 \\
\cos\alpha(\operatorname{sen}\alpha - 1) &= 0
\end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \cos\alpha & = 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{ \boxed{\begin{array}{lll} \alpha & = & \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi \\ \alpha & = & \dfrac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi \end{array}} \right.$$

La primera solución incluye a la segunda, luego

$$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{2} + k\,\pi}$$

□

Ejercicio 6(e)
Utilizamos la definición de la tangente, operamos y sacamos factor común:

$$\begin{aligned}
\tan\alpha =& 2\ \operatorname{sen}\alpha \\
\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} =& 2\ \operatorname{sen}\alpha \\
\operatorname{sen}\alpha =& 2\ \operatorname{sen}\alpha\ \cos\alpha \\
\operatorname{sen}\alpha\,(1-2\ \cos\alpha) =& 0
\end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \operatorname{sen}\alpha & = 0 \\ \cos\alpha & = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \alpha & = \boxed{0 + k\ \pi} \\ \alpha & = \boxed{\dfrac{\pi}{3} + 2\ k\ \pi} \quad \boxed{\dfrac{5\pi}{3} + 2\ k\ \pi} \end{array}\right.$$

MATEMATICAS 1º Bachillerato
r=A+λu
A
δ
B
s=B+μv
CIENCIAS
MaTEX
TRIGONO-METRÍA II
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 6(f)
Expresamos el coseno en función del seno, elevamos al cuadrado y resolvemos la ecuación:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\alpha+\sqrt{3}\,\cos\alpha &=0\\
\operatorname{sen}\alpha+\sqrt{3}\,\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} &=0\\
\sqrt{3}\,\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} &=-\operatorname{sen}\alpha\\
3\,(1-\operatorname{sen}^2\alpha) &=\operatorname{sen}^2\alpha\\
4\,\operatorname{sen}^2\alpha &=3\\
\operatorname{sen}\alpha &=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{ll}\operatorname{sen}\alpha & =\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \operatorname{sen}\alpha & =-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll}\alpha & =\dfrac{\pi}{3}+2k\,\pi \quad \boxed{\dfrac{2\pi}{3}+2k\,\pi}\\ \alpha & =\dfrac{4\pi}{3}+2k\,\pi \quad \boxed{\dfrac{5\pi}{3}+2k\,\pi}\end{array}\right.$$

Las que no tienen recuadro no cumplen la ecuación inicial. □

MATEMATICAS 1º Bachillerato
CIENCIAS
MaTEX
TRIGONOMETRÍA II
◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Ejercicio 6(g)

$$
\begin{aligned}
2\ \operatorname{sen}(\alpha - 30^o) &= -\,1\\
\operatorname{sen}(\alpha - 30^o) &= -\,\frac{1}{2}\\
\alpha - 30^o &= 210^o + 2k\pi \quad 330^o + 2k\pi\\
\alpha &= \boxed{240^o + 2k\ \pi} \quad \boxed{330^o + 2k\ \pi}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 6(h)

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 2\alpha \ \operatorname{cosec} \alpha &= \tan \alpha + \sec \alpha \\
2 \ \operatorname{sen} \alpha \ \cos \alpha \ \operatorname{cosec} \alpha &= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha} \\
2 \ \cos \alpha &= \frac{\operatorname{sen} \alpha + 1}{\cos \alpha} \\
2 \ \cos^2 \alpha &= \operatorname{sen} \alpha + 1 \\
2\,(1 - \operatorname{sen}^2 \alpha) &= \operatorname{sen} \alpha + 1 \\
2 \ \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen} \alpha - 1 &= 0
\end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{sen} \alpha & = \dfrac{1}{2} \\ \operatorname{sen} \alpha & = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \alpha & = \boxed{\dfrac{\pi}{5} + 2k\pi} \quad \boxed{\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi} \\ \alpha & = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{array} \right.$$

Las que no tienen recuadro no verifican la ecuación inicial.

□

Ejercicio 7(a)

$$\begin{aligned} 2 - \operatorname{sen} x &= \cos^2 x + 7 \operatorname{sen}^2 x \\ 2 - \operatorname{sen} x &= 1 + 6 \operatorname{sen}^2 x \end{aligned}$$

$$6 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x & = \dfrac{1}{3} \\ \operatorname{sen} x & = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

- $\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{3}$ con la calculadora $x = \operatorname{arc\,sen} \dfrac{1}{3} \simeq 19{,}47^o$

$$\begin{cases} x & = \boxed{19{,}47^o + 2\,k\pi} \\ x & = \boxed{160{,}53^o + 2\,k\pi} \end{cases}$$

- $\operatorname{sen} x = -\dfrac{1}{2} \Longrightarrow \begin{cases} x & = \boxed{\dfrac{7\pi}{6} + 2\,k\pi} \\ x & = \boxed{\dfrac{11\pi}{6} + 2\,k\pi} \end{cases}$

□

Ejercicio 7(b)

$$\begin{aligned} 2\,\text{sen}^2 x + 3\,\cos x =& 0 \\ 2\,(1-\cos^2 x) + 3\,\cos x =& 0 \\ 2\,\cos^2 x - 3\,\cos x - 2 =& 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \cos x & = 2 \\ \cos x & = -\dfrac{1}{2} \end{array} \right. \end{aligned}$$

- $\cos x = 2$ no tiene solución pues $-1 \leq \cos x \leq 1$
- $\cos x = -\dfrac{1}{2} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x & = \boxed{\dfrac{2\pi}{3} + 2\,k\pi} \\ x & = \boxed{\dfrac{4\pi}{3} + 2\,k\pi} \end{array} \right.$

Ejercicio 7(c)

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen} x + \cos x =& 1 \\
(\operatorname{sen} x - 1)^2 =& \cos^2 x \\
\operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen} x + 1 =& \cos^2 x \\
2\ \operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen} x =& 0 \\
2\ \operatorname{sen} x(\operatorname{sen} x - 1) =& 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{sen} x & = 1 \\ \operatorname{sen} x & = 0 \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

- $\operatorname{sen} x = 1 \Longrightarrow x = \boxed{\dfrac{\pi}{2} + 2\,k\pi}$
- $\operatorname{sen} x = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x & = \boxed{0 + 2\,k\pi} \\ x & = \pi + 2\,k\pi \end{array} \right.$

La que no tiene recuadro no cumple la ecuación inicial. Comprobarlo. $\square$

Ejercicio 7(d)

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2 x + \cos x + 1 =& 0\\ 1-\cos^2 x + \cos x + 1 =& 0\\ \cos^2 x - \cos x - 2 =& 0 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll}\cos x & = 2\\ \cos x & = -1\end{array}\right.\end{aligned}$$

- $\cos x = 2$ no tiene solución pues $-1 \leq \cos x \leq 1$
- $\cos x = -1 \Longrightarrow x = \boxed{\pi + 2\,k\pi}$

□

Ejercicio 7(e)

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x + \cos x &= \sqrt{2} \\
(\operatorname{sen} x - \sqrt{2})^2 &= \cos^2 x \\
\operatorname{sen}^2 x - 2\sqrt{2}\operatorname{sen} x + 2 &= \cos^2 x \\
2\ \operatorname{sen}^2 x - 2\sqrt{2}\operatorname{sen} x + 1 &= 0 \Longrightarrow \left\{ \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \right.
\end{aligned}$$

- $\operatorname{sen} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \begin{cases} x = \boxed{\dfrac{\pi}{4} + 2\,k\pi} \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\,k\pi \end{cases}$

La que no tiene recuadro no cumple la ecuación inicial. Comprobarlo.

Ejercicio 7(f)

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2x - 2 \operatorname{sen} 4x &= 0 \\ \operatorname{sen} 2x - 4 \operatorname{sen} 2x \cos 2x &= 0 \\ \operatorname{sen} 2x(1 - 2 \cos 2x) &= 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{sen} 2x & = 0 \\ \cos 2x & = \dfrac{1}{2} \end{array} \right. \end{aligned}$$

- $\operatorname{sen} 2x = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x & = \boxed{0 + \dfrac{k\,\pi}{2}} \end{array} \right.$

- $\cos 2x = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 2x & = \dfrac{\pi}{3} + 2\,k\pi \\ 2x & = \dfrac{5\pi}{3} + 2\,k\pi \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x & = \boxed{\dfrac{\pi}{6} + k\pi} \\ x & = \boxed{\dfrac{5\pi}{6} + k\pi} \end{array} \right.$

□

Ejercicio 7(g)

$$
\begin{aligned}
2\ \operatorname{sen}(\alpha - 30^o) &= -\,1 \\
\operatorname{sen}(\alpha - 30^o) &= -\,\frac{1}{2} \\
\alpha - 30^o &= 210^o + 2k\pi \quad 330^o + 2k\pi \\
\alpha &= \boxed{240^o + 2k\ \pi} \quad \boxed{330^o + 2k\ \pi}
\end{aligned}
$$

□

Ejercicio 7(h)

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 2\alpha \ \operatorname{cosec}\alpha &= \tan\alpha + \sec\alpha \\
2\operatorname{sen}\alpha \ \cos\alpha \ \operatorname{cosec}\alpha &= \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha} \\
2\cos\alpha &= \frac{\operatorname{sen}\alpha + 1}{\cos\alpha} \\
2\cos^2\alpha &= \operatorname{sen}\alpha + 1 \\
2(1-\operatorname{sen}^2\alpha) &= \operatorname{sen}\alpha + 1 \\
2\operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}\alpha - 1 &= 0
\end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \operatorname{sen}\alpha & = \dfrac{1}{2} \\ \operatorname{sen}\alpha & = -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \alpha & = \boxed{\dfrac{\pi}{5} + 2k\pi} \quad \boxed{\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi} \\ \alpha & = \boxed{\dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi} \end{array}\right.$$

$\square$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 8(a)

$$\begin{aligned}
\frac{1-\cos 2\,\alpha}{\cos^2\alpha} =& \frac{1-\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} && \triangleleft \cos 2\alpha \\
=& \frac{2\,\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} && \triangleleft \text{for. fundamental} \\
=& 2\,\tan^2\alpha
\end{aligned}$$

$\square$

Ejercicio 8(b)

$$
\begin{aligned}
\frac{1+\cos 2\,\alpha}{\cos^2\alpha} &= \frac{1+\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} && \triangleleft \cos 2\alpha \\
&= \frac{2\,\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} && \triangleleft \text{for. fundamental} \\
&= 2
\end{aligned}
$$

$\square$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 8(c)

$$\begin{aligned}
\frac{1-\cos 2\,\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} =& \frac{1-\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} && \triangleleft \cos 2\alpha \\
=& \frac{2\,\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} && \triangleleft \text{for. fundamental} \\
=& 2
\end{aligned}$$

$\square$

Ejercicio 8(d)

$$\begin{aligned}
\frac{\cos 2\,\alpha}{\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha} &= \frac{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha} && \triangleleft\ \cos 2\alpha \\
&= \frac{(\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha)(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)}{\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha} && \triangleleft\ \text{dif. cuadrados} \\
&= \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha
\end{aligned}$$

$\square$

Ejercicio 9(a) Sumando las expresiones:

$$\operatorname{sen}(45+\beta) = \operatorname{sen} 45 \, \cos\beta + \cos 45 \, \operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(45+\beta) = \cos 45 \, \cos\beta - \operatorname{sen} 45 \, \operatorname{sen}\beta$$

se obtiene

$$\operatorname{sen}(45+\beta) + \cos(45+\beta) = \sqrt{2}\,\cos\beta$$

$\square$

Ejercicio 9(b) Sumando las expresiones:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(30+\beta) &= \operatorname{sen} 30\ \cos\beta + \cos 30\ \operatorname{sen}\beta \\
&= \frac{1}{2}\ \cos\beta + \frac{\sqrt{3}}{2}\ \operatorname{sen}\beta \\
\cos(60+\beta) &= \cos 60\ \cos\beta - \operatorname{sen} 60\ \operatorname{sen}\beta \\
&= \frac{1}{2}\ \cos\beta - \frac{\sqrt{3}}{2}\ \operatorname{sen}\beta
\end{aligned}$$

se obtiene

$$\operatorname{sen}(30+\beta) + \cos(60+\beta) = \cos\beta$$

□

Ejercicio 9(c) Sumando las expresiones:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(30+x) &= \operatorname{sen} 30 \, \cos x + \cos 30 \, \operatorname{sen} x \\ &= \frac{1}{2} \, \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \, \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen}(30-x) &= \operatorname{sen} 30 \, \cos x - \cos 30 \, \operatorname{sen} x \\ &= \frac{1}{2} \, \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \, \operatorname{sen} x\end{aligned}$$

se obtiene

$$\operatorname{sen}(30+x) + \operatorname{sen}(30-x) = \cos x$$

□

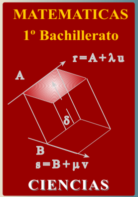
Ejercicio 9(d) Restando las expresiones:

$$\begin{aligned}\cos(30+x) &= \cos 30\ \cos x - \operatorname{sen} 30\ \operatorname{sen} x\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\ \cos x - \frac{1}{2}\ \operatorname{sen} x\\ \cos(30-x) &= \cos 30\ \cos x + \operatorname{sen} 30\ \operatorname{sen} x\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\ \cos x + \frac{1}{2}\ \operatorname{sen} x\end{aligned}$$

se obtiene

$$\cos(30+x) - \cos(30-x) = -\operatorname{sen} x$$

$\square$



Ejercicio 10. Quitamos denominadores:

$$\operatorname{sen} 3x \cos x - \cos 3x \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

En el miembro de la izquierda convertimos los productos en sumas

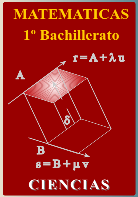
$$\operatorname{sen} 3x \cos x = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 2x)$$

$$\cos 3x \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} 2x)$$

y restando se obtiene

$$\operatorname{sen} 3x \cos x - \cos 3x \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

Ejercicio 10



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 11. De la tangente del ángulo doble se tiene

$$
\begin{aligned}
\tan 2\alpha =& \frac{2\,\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} && (\text{haciendo } \tan\alpha = a)\\
\frac{2}{3} =& \frac{2\,a}{1-a^2} && (\textit{operando})\\
0 =& 2a^2+6a-2 && (\textit{resolviendo})\\
a = \tan\alpha =& \frac{-3\pm\sqrt{13}}{2} && (\alpha \in 3^{\circ} \text{ cuadrante})\\
\tan\alpha =& \frac{-3+\sqrt{13}}{2}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 11

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 12. Planteamos el problema como una ecuación. Sea α el ángulo buscado, entonces

$$\begin{aligned}
\tan\alpha &= \cot\alpha \\
\tan\alpha &= \frac{1}{\tan\alpha} \\
\tan^2\alpha &= 1 \\
\tan\alpha &= \pm 1 \\
\alpha &= \boxed{45^o, 135^o, 225^o, 315^o}
\end{aligned}$$

Ejercicio 12

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Proyecto MaTEX

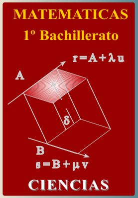
Resolución de Triángulos

Fco Javier González Ortiz

Directorio

D.L.:SA-1415-2004

ISBN: 84-688-8267-4



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Tabla de Contenido

1. Triángulos rectángulos

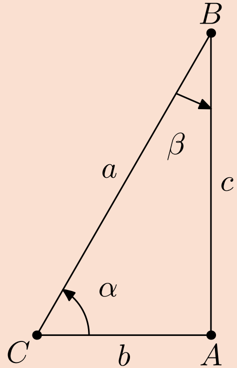
Hallar los elementos de un triángulo rectángulo $\triangle CAB$ a partir de otros elementos es muy sencillo:

- Para los ángulos se tiene

$$\widehat{A} = 90^o \quad \alpha + \beta = 90^o$$

  luego, si se conoce un ángulo agudo el otro es su complementario.

- Con un ángulo agudo y cualquier lado conocido, se pueden hallar los demás lados.



Basta para ello usar las razones trigonométricas de los ángulos α o β

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{c}{a} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{a} \qquad \tan\alpha = \frac{c}{b}$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{b}{a} \qquad \cos\beta = \frac{c}{a} \qquad \tan\beta = \frac{b}{c}$$

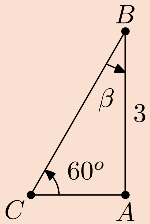
MaTEX
TRIÁNGULOS
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejemplo 1.1. Resuelve el triángulo conocidos $\alpha = 60^o$ y $AB = 3$.

Solución: $\beta = 90^o - \alpha = 30^o$

$$\operatorname{sen} 60^o = \frac{3}{CB} \Longrightarrow CB \approx 3{,}46$$

$$\tan 60^o = \frac{3}{CA} \Longrightarrow CA \approx 1{,}73$$



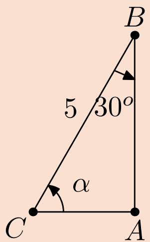
□

Ejemplo 1.2. Resuelve el triángulo conocidos $\beta = 30^o$ y $CB = 5$.

Solución: $\alpha = 90^o - \beta = 60^o$

$$\operatorname{sen} 60^o = \frac{AB}{5} \Longrightarrow AB \approx 4{,}33$$

$$\cos 60^o = \frac{CA}{5} \Longrightarrow CA = 2{,}5$$

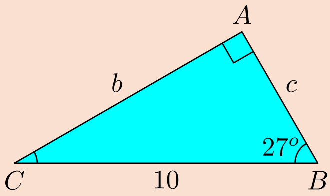


□

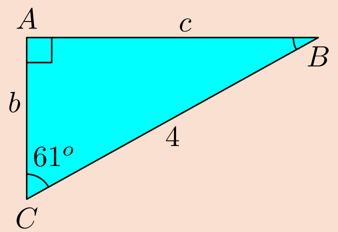
1.1. Ejercicios

Ejercicio 1. Hallar los elementos del triángulo que faltan

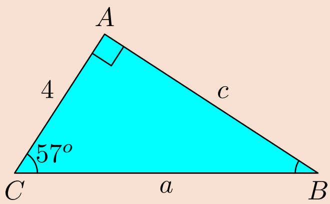
(a)



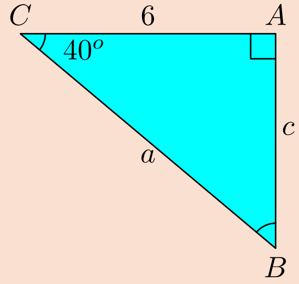
(b)



(c)



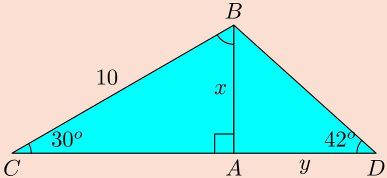
(d)



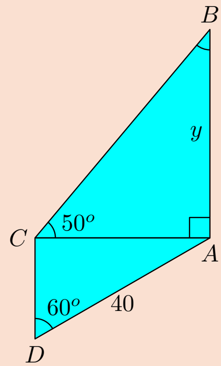
MaTEX
Triángulos
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 2. Los siguientes gráficos están formados con triángulos rectángulos. Hallar las incógnitas que aparecen en ellos.

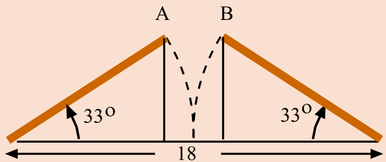
(a)



(b)



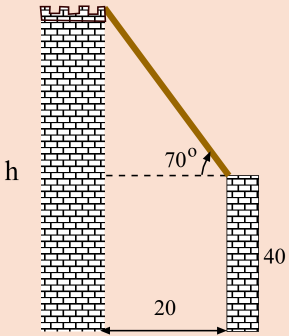
Ejercicio 3. Dos puentes levadizos tienen la misma longitud y están elevados 33^o, ¿qué distancia separa los puntos A y B ?



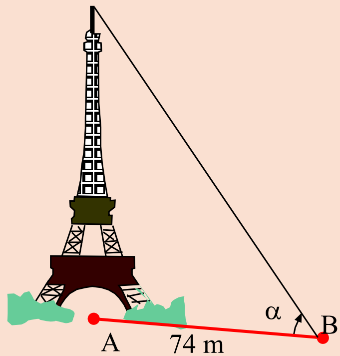
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 4. Resolver los siguientes ejercicios:

(a) Desde lo alto de una torre se ven las almenas de otra torre separada 20 m bajo un ángulo de 70^o. Si estas a una altura de 40 m, ¿cuál es la longitud de una escalera apoyada en ambas y la altura de la torre vecina?



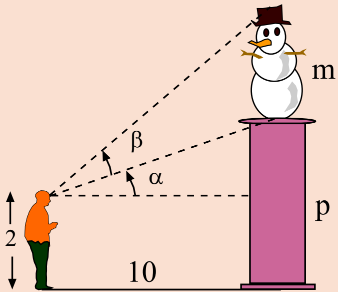
(b) Para calcular de la torre Eiffel, una persona se sitúa en B a una distancia de 74 m de la base de la torre. Si observa la torre bajo un ángulo $\alpha = 75^o$.¿Cuánto mide la torre Eiffel ?

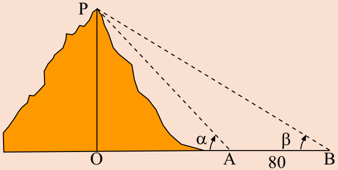


Ejercicio 5. Resolver los siguientes ejercicios:

(a) Una persona de 2 m se sitúa a 10 m de una estatua de longitud m sobre un pedestal de altura p. Si calcula los ángulos $\alpha = 20$ y $\beta = 15$, hallar la longitud de la estatua.

(b) Para calcular la altura de la montaña, desde dos puntos A y B separados una distancia $AB = 80$ m, se miden los ángulos $\alpha = 40^o$ y $\beta = 35^o$ ¿Cuál es la altura de la montaña?



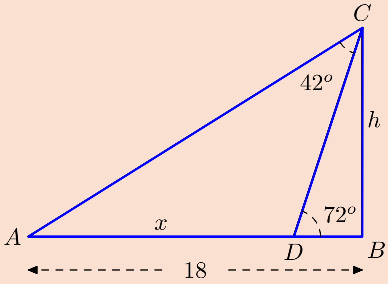


MATEMATICAS 1º Bachillerato CIENCIAS

MaTEX

TRIÁNGULOS

Ejercicio 6. En el gráfico siguiente calcular el valor de x y h



2. Triángulos cualesquiera

2.1. Teorema de los senos

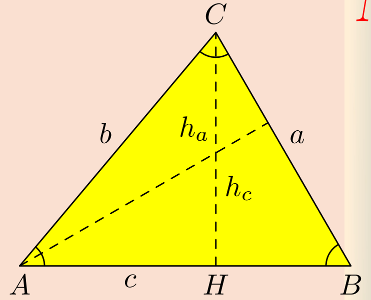
Teorema 2.1. Sea el triángulo ABC y la altura h_c correspondiente al vértice C. Como los triángulos AHC y BHC son rectángulos, se tiene que:

$$\begin{array}{rl} h_c = & b \operatorname{sen} A \\ h_c = & a \operatorname{sen} B \end{array} \Longrightarrow b \operatorname{sen} A = a \operatorname{sen} B$$

luego

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

De forma análoga si se traza la altura h_a correspondiente al vértice A



En todo triángulo la proporción de los lados y los senos de sus ángulos respectivos es constante.

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \tag{1}$$

MATEMATICAS 1º Bachillerato CIENCIAS
MaTEX
TRIÁNGULOS
◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

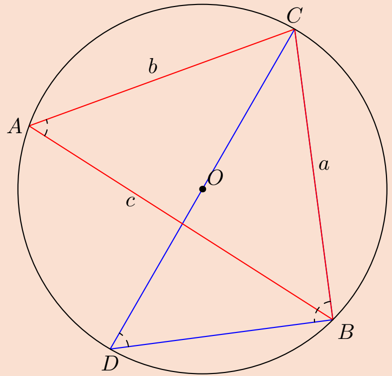
Nota de interés Si construimos la circunferencia de radio r circunscrita al triángulo ABC y trazamos el diámetro CD, se tiene:

En ABC se cumple

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

El triángulo DBC tiene un lado común a, el lado $DC = 2r$ pues es un diámetro y el $\widehat{B} = 90^o$, pues abarca un diámetro,luego:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} D} = \frac{2r}{\operatorname{sen} 90^o}$$



Como los ángulos $\widehat{A} = \widehat{D}$ son iguales, ya que abarcan el mismo arco, al sustituir en la primera expresión se obtiene que la proporción es igual al diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2r$$

Ejemplo 2.1. De un triángulo se conocen el lado $b = 5$ y los ángulos $\widehat{A} = 35^o$ y $\widehat{B} = 100^o$. Hallar los otros dos lados.

Solución: Por el teorema de los senos

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 35^o} = \frac{5}{\operatorname{sen} 100^o} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

despejando a, $a = \dfrac{5}{\operatorname{sen} 100^o} \operatorname{sen} 35^o \Longrightarrow \boxed{a \approx 2{,}91}$

Como $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^o \Longrightarrow \widehat{C} = 45^o$, y despejando c

$$c = \frac{5}{\operatorname{sen} 100^o} \operatorname{sen} 45^o \Longrightarrow \boxed{c \approx 3{,}59}$$

□

Ejemplo 2.2. De un triángulo se conocen el lado $c = 4$ y los ángulos $\widehat{B} = 35^o$ y $\widehat{C} = 120^o$. Hallar los otros dos lados.

Solución: Por el teorema de los senos

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} 35^o} = \frac{4}{\operatorname{sen} 120^o}$$

despejando b, $b = \dfrac{4}{\operatorname{sen} 120^o} \operatorname{sen} 35^o \Longrightarrow \boxed{b \approx 2{,}65}$

Como $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^o \Longrightarrow \widehat{A} = 25^o$, y despejando a

$$a = \frac{4}{\operatorname{sen} 120^o} \operatorname{sen} 25^o \Longrightarrow \boxed{a \approx 1{,}952}$$

□

Ejemplo 2.3. Resuelve el triángulo dados $a = 4, b = 5$ y $\widehat{A} = 45^o$.

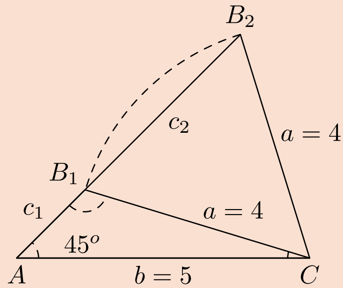
Solución:

Por el teorema de los senos

$$\frac{4}{\operatorname{sen} 45^o} = \frac{5}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

despejando $\operatorname{sen} B$

$$\operatorname{sen} B = 5\,\frac{\operatorname{sen} 45^o}{4} = 0{,}88$$



$$\Longrightarrow \boxed{B_1 = 117{,}89^o \vee B_2 = 62{,}11^o}$$

Como

$$A + B + C = 180^o \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{ll} C_1 = 17{,}11^o & c_1 = 1{,}66 \\ C_2 = 72{,}89^o & c_2 = 5{,}41 \end{array}}$$

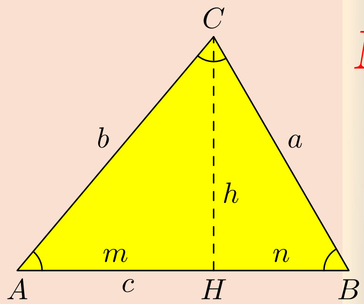
En el dibujo se aprecia por qué tiene dos soluciones . □

2.2. Teorema del coseno

Teorema 2.2. Sea el triángulo ABC y la altura h_c correspondiente al vértice C. Como los triángulos AHC y BHC son rectángulos, se tiene que:

$$\begin{array}{rl} a^2 = & n^2 + h^2 \\ b^2 = & m^2 + h^2 \end{array} \qquad \text{restando}$$

$$a^2 - b^2 = n^2 - m^2$$



Sustituyendo $n = c - m$, se obtiene

$$a^2 - b^2 = c^2 - 2\,c\,m$$

y teniendo en cuenta que $m = b \cos A$

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2\,a\,c\,\cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos C \end{aligned} \qquad (2)}$$

Con estas expresiones, a partir de dos lados y el ángulo comprendido se puede calcular el tercer lado.

MATEMATICAS 1º Bachillerato CIENCIAS
MaTEX
TRIÁNGULOS
◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Ejemplo 2.4. Hallar el lado c de un triángulo, conociendo los lados $a = 5$, $b = 4$ y el ángulo comprendido $\hat{C} = 60^o$.

Solución: Del teorema del coseno se tiene:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\hat{C}$$
$$c^2 = (5)^2 + (4)^2 - 2\,(5)\,(4)\,\cos 60^o = 21 \Longrightarrow \boxed{c = 4{,}5826}$$

□

Ejemplo 2.5. Hallar los ángulos de un triángulo conociendo sus lados $a = 5$, $b = 4$ y $c = 7$.

Solución: Del teorema del coseno se tiene:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos A$$
$$\cos A = -\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2\,b\,c} = -\frac{5}{7} \Longrightarrow \boxed{A = 135{,}58^o}$$

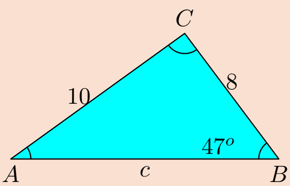
Ahora con el teorema de los senos calculamos otro ángulo

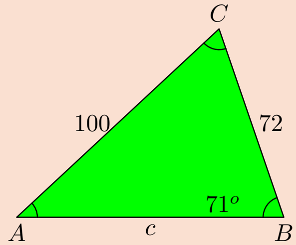
$$\frac{5}{\operatorname{sen} A} = \frac{4}{\operatorname{sen} B} = \frac{7}{\operatorname{sen} C}$$
$$\operatorname{sen} B = 4\,\frac{\operatorname{sen} A}{5} = 4\,\frac{0{,}7}{5} = 0{,}56 \Longrightarrow \boxed{B = 30{,}05^o}$$

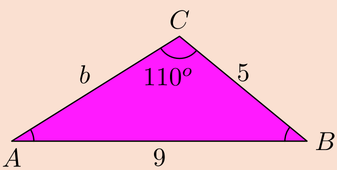
Como $A + B + C = 180^o \Longrightarrow \boxed{C = 14{,}37^o}$ □

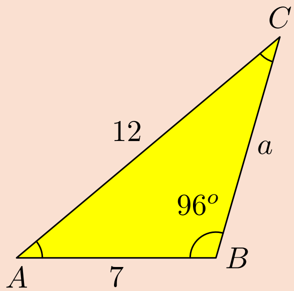
2.3. Ejercicios

Ejercicio 7. Hallar los elementos del triángulo que faltan

(a) 

(b) 

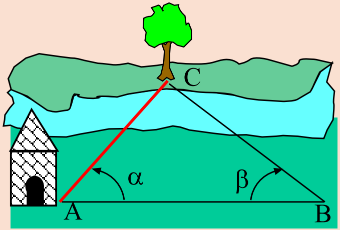
(c) 

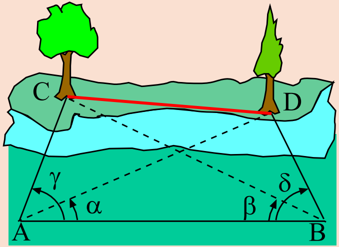
(d) 

Ejercicio 8. Resolver los siguientes ejercicios:

(a) Se quiere calcular la distancia AC entre una casa y un árbol separados por un rio.
Para ello nos separamos una distancia $AB = 80$ m, midiendo los ángulos $\alpha = 60^o$ y $\beta = 35^o$.

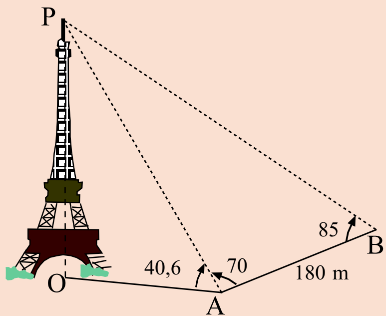
(b) Se quiere calcular la distancia CD entre dos árboles inaccesibles. Para ello nos separamos una distancia $AB = 100$m, midiendo los ángulos α, β, γ y δ





◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 9. Para calcular la altura de la torre Eiffel sin acceder hasta su base, una persona efectúa las medidas de los ángulos del dibujo en dos puntos A y B separados 180 m. ¿Cuánto mide la altura OP de la torre Eiffel?



Ejercicio 10. En los siguientes ejercicios se dan **tres** elementos de un triángulo. Se piden los elementos que faltan.

a) $a = 10, b = 9, \hat{C} = 70^o$

b) $a = 12, \hat{A} = 30^o, \hat{B} = 100^o$

c) $a = 4, b = 8, \hat{B} = 40^o$

d) $a = 6, b = 7, c = 8$

e) $a = 8, b = 12, c = 20$

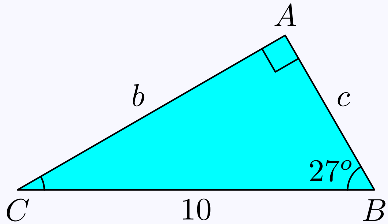
f) $b = 10, c = 6, \hat{C} = 45^o$

g) $a = 10, \hat{A} = 45^o, \hat{C} = 75^o$

h) $a = 1, c = \sqrt{3}, \hat{B} = 30^o$

Soluciones a los Ejercicios

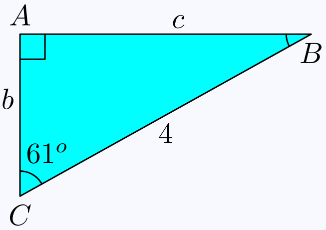
Ejercicio 1(a) Al ser un triángulo rectángulo



$$
\begin{aligned}
\widehat{B}+\widehat{C} &= 90^o &\Longrightarrow&\quad \widehat{C} = 63^o\\
c &= 10\,\cos 27^o &\Longrightarrow&\quad c \simeq 8{,}91\\
b &= 10\,\text{sen}\, 27^o &\Longrightarrow&\quad b \simeq 4{,}54
\end{aligned}
$$

$\square$

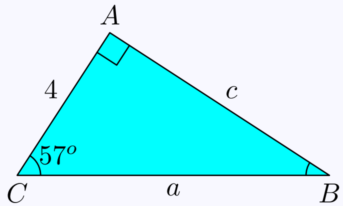
Ejercicio 1(b) Al ser un triángulo rectángulo



$$\widehat{B} + \widehat{C} = 90^o \quad \Longrightarrow \quad \widehat{B} = 29^o$$
$$c = 4\ \text{sen}\, 61^o \quad \Longrightarrow \quad c \simeq 3{,}5$$
$$b = 4\ \cos 61^o \quad \Longrightarrow \quad b \simeq 1{,}94$$

□

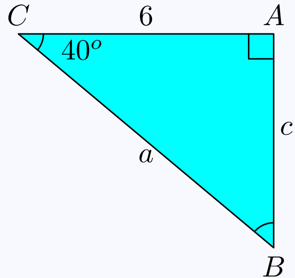
Ejercicio 1(c) Al ser un triángulo rectángulo



$$\begin{aligned}
\widehat{B}+\widehat{C} =& 90^o \Longrightarrow & \widehat{B}=33^o\\
4 =& a\ \cos 57^o \Longrightarrow & a \simeq 7{,}34\\
\tan 57^o =& \frac{c}{4} \Longrightarrow & c \simeq 6{,}16
\end{aligned}$$

$\square$

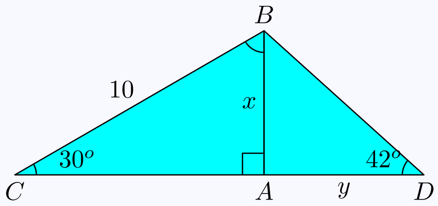
Ejercicio 1(d) Al ser un triángulo rectángulo



$$
\begin{aligned}
\widehat{B}+\widehat{C} = & 90^o && \Longrightarrow && \widehat{B}=50^o \\
6 = & a\ \cos 40^o && \Longrightarrow && a \simeq 7{,}83 \\
\tan 40^o = & \frac{c}{6} && \Longrightarrow && c \simeq 5{,}03
\end{aligned}
$$

□

Ejercicio 2(a)



En el triángulo rectángulo ΔCAB se tiene

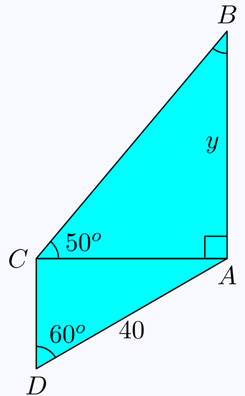
$$x = 10 \operatorname{sen} 30^o = \boxed{5}$$

y en el triángulo rectángulo ΔDAB se tiene

$$\tan 42^o = \frac{x}{y} \Longrightarrow \boxed{y \simeq 5{,}55}$$

□

Ejercicio 2(b)



En el triángulo rectángulo ΔDCA se tiene

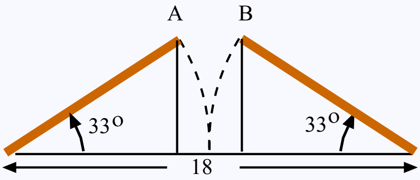
$$CA = 40 \text{ sen } 60^o = \boxed{34{,}64}$$

y en el triángulo rectángulo ΔCAB se tiene

$$\tan 50^o = \frac{y}{CA} \Longrightarrow \boxed{y \simeq 41{,}28}$$

Ejercicio 3.

Como la distancia total es 18 cada puente mide 9 m.
Del dibujo se aprecia que dos veces la proyección horizontal del puente mas AB es igual a 18. Es decir



$$9 \times \cos 33^o + AB + 9 \times \cos 33^o = 18$$

luego

$$AB = 18 - 18 \times \cos 33^o \approx \boxed{2{,}9} \text{ m.}$$

Ejercicio 3

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 4(a)

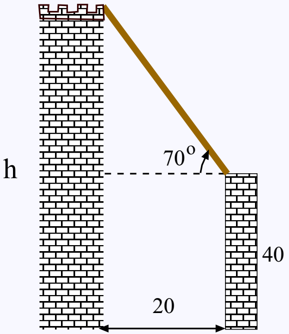
Sea e la longitud de la escalera, se tiene

$$\cos 70^o = \frac{20}{e} \Longrightarrow \boxed{e \approx 58{,}5}$$

Por otra parte

$$\tan 70^o = \frac{h-40}{20} \Longrightarrow$$

$$\boxed{h = 40 + 20\,\tan 70^o \approx 90{,}95}$$



$\square$

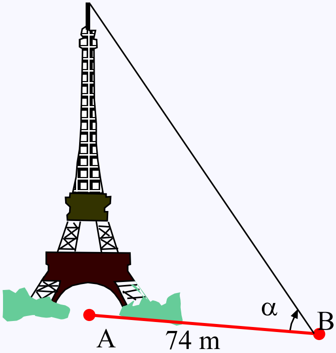
Ejercicio 4(b)

Siendo $\alpha = 75^o$, y considerando un triángulo rectángulo con ángulo recto en A, se tiene

$$\tan\alpha = \frac{h}{74}$$

luego

$$\boxed{h = 74 \times \tan 75^o \approx 276} \text{ metros}$$



Ejercicio 5(a)

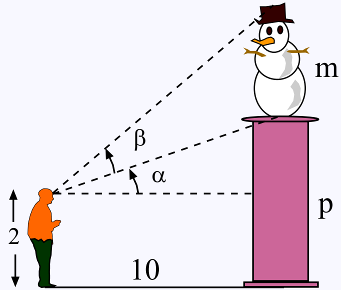
Siendo $\alpha = 20$ y $\beta = 15$,

$$\tan\alpha = \frac{p-2}{10} \Longrightarrow$$

$$\boxed{p = 2 + 10\,\tan 20^o \approx 5{,}64}$$

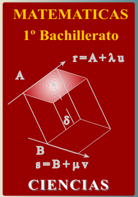
Por otra parte se tiene que

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{m+p-2}{10} \Longrightarrow$$



despejando la altura m de la estatua

$$\boxed{m = 2 - p + 10\,\tan(20^o + 15^o) \approx 3{,}36}$$



MaTEX

TRIÁNGULOS

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

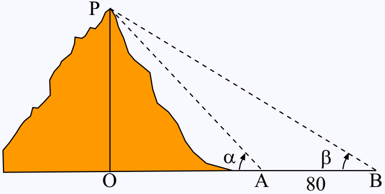
Ejercicio 5(b)

Sea la altura $\overline{OP} = h$, $\alpha = 40^o$ y $\beta = 35^o$. En OAP se tiene

$$\tan 40^o = \frac{h}{\overline{OA}}$$

y en OBP se tiene

$$\tan 35^o = \frac{h}{\overline{OA} + 80}$$



Resolvemos el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, h y $\overline{OA}$:

$$h = 0{,}84\, \overline{OA} \Longrightarrow 0{,}70 = \frac{0{,}84\, \overline{OA}}{\overline{OA} + 80}$$

Despejando $\overline{OA}$, se obtiene $\boxed{\overline{OA} = 400}$ m.

Sustituyendo en la primera ecuación se obtiene la altura $\boxed{h \approx 336}$ m.

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

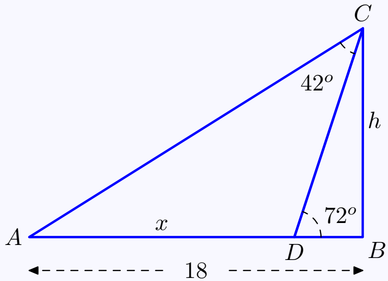
Ejercicio 6. Primero calculamos el valor de $\widehat{A}$

Como $\angle ADB = 180^o - 72^o$

$\widehat{A} + 42^o + \angle ADB = 180^0 \Longrightarrow$

$\widehat{A} + 42^o + (180^o - 72^o) = 180^0 \Longrightarrow$

$$\widehat{A} = 30^o$$



$$\tan 30^o = \frac{h}{18} \Longrightarrow h = \frac{18}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$$

Por otra parte

$$\tan 72^o = \frac{h}{18 - x} = \frac{6\sqrt{3}}{18 - x} \Longrightarrow 3{,}08 = \frac{6\sqrt{3}}{18 - x}$$

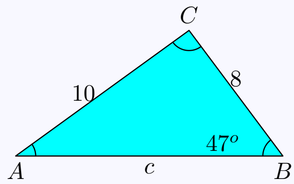
$$55{,}4 - 3{,}08\,x = 10{,}4 \Longrightarrow \boxed{x \approx 14{,}6}$$

Ejercicio 6

Ejercicio 7(a)

De la regla de los senos

$$\frac{8}{\operatorname{sen} A} = \frac{10}{\operatorname{sen} 47^o} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

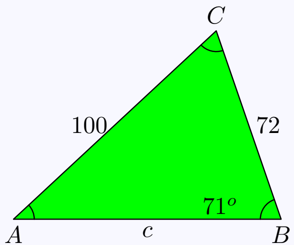


$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} A =& \frac{a}{b} \operatorname{sen} B \\
=& \frac{8}{10} \operatorname{sen} 47^o = 0{,}585 \Longrightarrow \quad A \simeq 35{,}8^o \\
A + B + C =& 180^o \Longrightarrow \qquad C \simeq 97{,}19^o \\
c =& \frac{b}{\operatorname{sen} B} \operatorname{sen} C \\
=& \frac{10}{\operatorname{sen} 47^o} \operatorname{sen} 97{,}19^o \Longrightarrow \quad c \simeq 13{,}56
\end{aligned}$$

□

Ejercicio 7(b)

De la regla de los senos
$$\frac{72}{\operatorname{sen} A} = \frac{100}{\operatorname{sen} 71^o} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$



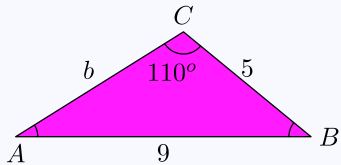
$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} A =& \frac{a}{b} \operatorname{sen} B \\
=& \frac{72}{100} \operatorname{sen} 71^o = 0{,}68 \Longrightarrow \quad A \simeq 42{,}9^o \\
A + B + C =& 180^o \Longrightarrow \qquad\qquad C \simeq 66{,}10^o \\
c =& \frac{b}{\operatorname{sen} B} \operatorname{sen} C \\
=& \frac{100}{\operatorname{sen} 71^o} \operatorname{sen} 66{,}10^o \Longrightarrow \quad c \simeq 96{,}69
\end{aligned}$$

□

Ejercicio 7(c)

De la regla de los senos

$$\frac{5}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{9}{\operatorname{sen} 110^o}$$



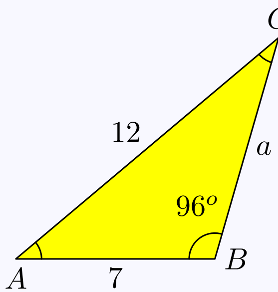
$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} A =& \frac{a}{c} \operatorname{sen} C \\
=& \frac{5}{9} \operatorname{sen} 110^o = 0{,}52 \Longrightarrow A \simeq 31{,}5^o \\
A + B + C =& 180^o \Longrightarrow \qquad B \simeq 38{,}5^o \\
b =& \frac{c}{\operatorname{sen} C} \operatorname{sen} B \\
=& \frac{9}{\operatorname{sen} 110^o} \operatorname{sen} 38{,}5^o \Longrightarrow \quad b \simeq 5{,}97
\end{aligned}$$

□

Ejercicio 7(d)

De la regla de los senos

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{12}{\operatorname{sen} 96^o} = \frac{7}{\operatorname{sen} C}$$



$$\begin{aligned} \operatorname{sen} C &= \frac{c}{b} \operatorname{sen} B \\ &= \frac{7}{12} \operatorname{sen} 96^o = 0{,}52 \Longrightarrow C \simeq 35{,}46^o \\ A + B + C &= 180^o \Longrightarrow \qquad\qquad A \simeq 48{,}54^o \\ a &= \frac{b}{\operatorname{sen} B} \operatorname{sen} A \\ &= \frac{12}{\operatorname{sen} 96^o} \operatorname{sen} 48{,}54^o \Longrightarrow \quad a \simeq 9{,}04 \end{aligned}$$

□

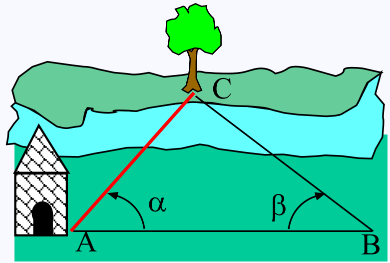
MATEMATICAS
1º Bachillerato
r=A+λu
A
δ
B
s=B+μv
CIENCIAS
MaTEX
Triángulos
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 8(a)

Siendo $\alpha = 60^o$ y $\beta = 35^o$, el ángulo $\widehat{C} = 85^o$.

$$\frac{AC}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{AB}{\operatorname{sen} C} \Longrightarrow$$

$$AC = \frac{AB}{\operatorname{sen} C}\operatorname{sen}\beta$$



sustituyendo se tiene

$$AC = \frac{80}{\operatorname{sen} 85^o}\operatorname{sen} 35^o$$

$$\boxed{AC \approx 46{,}06}$$

□

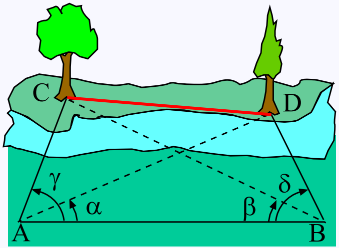
MATEMATICAS 1º Bachillerato CIENCIAS
MaTEX
Triángulos
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 8(b)

Primero calculamos AC en CAB con el teorema del seno

$$\frac{AC}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{AB}{\operatorname{sen}(\pi-\gamma-\beta)} \Longrightarrow$$

$$AC = \frac{AB}{\operatorname{sen}(\pi-\gamma-\beta)}\operatorname{sen}\beta$$



Ahora en el triángulo rectángulo ABD calculamos AD,

$$\frac{AD}{\operatorname{sen}\delta} = \frac{AB}{\operatorname{sen}(\pi-\alpha-\delta)} \Longrightarrow AD = \frac{AB}{\operatorname{sen}(\pi-\alpha-\delta)}\operatorname{sen}\delta$$

Por último con el teorema del coseno hallamos CD con el triángulo ACD

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2\,AC\,AD\cos(\gamma-\alpha)$$

□

Ejercicio 9.

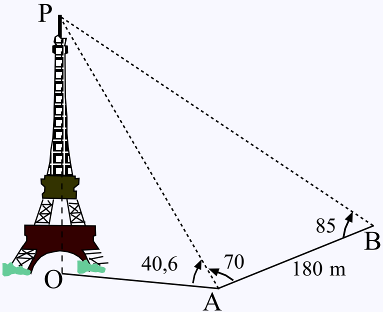
Primero calculamos AP en ABP

$$\frac{AP}{\text{sen}\, 85} = \frac{180}{\text{sen}\, 25} \Longrightarrow$$

$$AP = \frac{180}{\text{sen}\, 25}\,\text{sen}\, 85 \approx 424{,}3$$

Ahora en el triángulo rectángulo AOP se tiene,

$$\boxed{h = OP = AP \times \text{sen}\, 40{,}6 \approx 276{,}1}$$



Ejercicio 9

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 10.

a) $a = 10 \quad b = 9 \quad c = 10{,}93 \qquad \hat{A} = 59{,}3^o \quad \hat{B} = 50{,}7^o \quad \hat{C} = 70^o$

b) $a = 12 \quad b = 23{,}63 \quad c = 18{,}38 \qquad \hat{A} = 30^o \quad \hat{B} = 10^o \quad \hat{C} = 50^o$

c) $a = 4 \quad b = 8 \quad c = 10{,}64 \qquad \hat{A} = 18{,}74^o \quad \hat{B} = 40^o \quad \hat{C} = 121{,}25^o$

d) $a = 6 \quad b = 7 \quad c = 8 \qquad \hat{A} = 46{,}56^o \quad \hat{B} = 57{,}9^o \quad \hat{C} = 75{,}5^o$

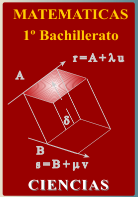
e) $a = 8 \quad b = 12 \quad c = 20 \Longrightarrow$ no tiene solución.

f) $b = 10, c = 6, \hat{C} = 45^o \Longrightarrow$ no tiene solución.

g) $a = 8{,}16 \quad b = 10 \quad c = 11{,}15 \qquad \hat{A} = 45^o \quad \hat{B} = 60^o \quad \hat{C} = 75^o$

h) $a = 1 \quad b = 1 \quad c = \sqrt{3} \qquad \hat{A} = 30^o \quad \hat{B} = 30^o \quad \hat{C} = 120^o$

Ejercicio 10



MaTEX
TRIÁNGULOS
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar