Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen
mit Hilfe der Parameterform

Inhaltsverzeichnis

Stand: 19. Juli 2017

Zusammengestellt von der Klasse 11a der Geschwister-Prenski-Schule der Hansestadt Lübeck

1 Gegenseitige Lage zweier Geraden

Für diesen Abschnitt sind zwei Geraden $g: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} + t \cdot \overrightarrow{u}$ und $h: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b} + s \cdot \overrightarrow{v}$ vorgegeben, wobei die Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ die Stützvektoren und die Vektoren $\overrightarrow{u}$ und $\overrightarrow{v}$ die Richtungsvektoren der Geraden sind.

1.1 Rechenwege

1. (a) Überprüfen, ob die **Richtungsvektoren** ($\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$) **Vielfache voneinander** sind.

   (b) Sind die Richtungsvektoren linear abhängig, so sind die Geraden parallel oder identisch.
   Nun wird die Punktprobe mit **einem der Stützvektoren und der anderen Geraden** (z.B. mit $\overrightarrow{a}$ und h) durchgeführt.
   Ist die Punktprobe positiv, so sind die Geraden identisch.

   (c) Sind die Richtungsvektoren linear unabhängig, so sind die Geraden windschief zueinander oder haben genau einen Schnittpunkt.
   Nun wird geprüft ob die Vektoren $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ **linear abhängig** sind.
   Sind die drei Vektoren linear abhängig, so haben die Geraden genau einen Schnittpunkt.

2. (a) g und h **gleichsetzen** und ein lineares Gleichungssystem (LGS) daraus aufstellen:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} + t \cdot \overrightarrow{u} &= \overrightarrow{b} + s \cdot \overrightarrow{v} \\ \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} &= s \cdot \overrightarrow{v} - t \cdot \overrightarrow{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 - b_1 &= s \cdot v_1 - t \cdot u_1 \\ a_2 - b_2 &= s \cdot v_2 - t \cdot u_2 \\ a_3 - b_3 &= s \cdot v_3 - t \cdot u_3 \end{aligned}$$

   (b) Das **LGS** nach den Koeffizienten s und t **auflösen**, wobei hierfür nur zwei der drei Gleichungen benötigt werden.

   (c) Die **ermittelten Werte** für s und t **überprüfen**, indem sie in die dritte Gleichung eigesetzt werden.
   Merke:
   - Hat das LGS keine Lösung, so sind die Geraden parallel oder windschief zueinander und es müssen die Richtungsvektoren auf lineare Abhängigkeit geprüft werden.
   - Hat das LGS genau eine Lösung, so haben die Geraden genau einen Schnittpunkt.
   - Hat das LGS unendlich viele Lösungen, so sind die Gleichungen identisch.

1.2 Beispiele

Die folgenden Beispiele sind den Beispielen der Vorträge im Mai 2017 nachempfunden oder entspammen diesen direkt.
Beispiel 1:

$$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad h : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Prüfen, ob die Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind: es gilt dabei, dass

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und somit sind die Richtungsvektoren linear abhängig.
Punktprobe mit (8|8|8) auf der Geraden g:

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

führt zu

$$\begin{aligned} 8 &= 4 + s \cdot 2 && \rightarrow s = 2 \\ 8 &= 0 + s \cdot 4 && \rightarrow s = 2 \\ 8 &= 4 + s \cdot 2 && \rightarrow s = 2 \end{aligned}$$

Da die Werte hier alle gleich sind, sind die Geraden g und h identisch.

Oder: g und h gleichsetzen und das LGS aufstellen:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Da in dem LGS die Zeilen 1 und 3 gleich sind, entfällt einer dieser Zeilen bei Subtraktion:

$$\begin{aligned} -4 &= -2 \cdot r - 2 \cdot s & \qquad -4 &= -2 \cdot r - 2 \cdot s \\ -8 &= -4 \cdot r - 4 \cdot s & -8 &= -4 \cdot r - 4 \cdot s \\ -4 &= -2 \cdot r - 2 \cdot s & 0 &= 0 \cdot r + 0 \cdot s \end{aligned}$$

Da Zeile 2 das doppelte von Zeile 1 ist, entfällt auch die zweite Zeile bei Subtraktion:

$$\begin{aligned} -4 &= -2 \cdot r - 2 \cdot s \\ -8 &= -4 \cdot r - 4 \cdot s \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} -4 &= -2 \cdot r - 2 \cdot s \\ 0 &= 0 \cdot r + 0 \cdot s \end{aligned}$$

Es verbleibt eine Gleichung mit zwei Unbekannten und zwei Gleichngen der Form $0 = 0$. So ist an dem LGS zu erkennen, dass die Geraden identisch sind.

<u>Beispiel 2:</u>

$$g : \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad h : \overrightarrow{z} = \begin{pmatrix} 9 \\ 25 \\ 5,5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gleichsetzen von w und z und LGS aufstellen:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 25 \\ 5,5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 25 \\ 5,5 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Wir vertauschen die Zeile 1 mit der Zeile 3 und nutzen anschließend das Additionsverfahren um einen Lösung des LGS zu bestimmen:

$$\begin{aligned} 6 &= -4 \cdot r + 12 \cdot s \\ 15 &= -5 \cdot r + 15 \cdot s \\ 1,5 &= -r + 3 \cdot s \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 1,5 &= -r + 3 \cdot s \\ 15 &= -5 \cdot r + 15 \cdot s \\ 6 &= -4 \cdot r + 12 \cdot s \end{aligned}$$

Wird das Fünffache der Zeile 1 von Zeile 2 subtrahiert, ergibt sich:

$$\begin{aligned} 1,5 &= -r + 3 \cdot s \\ 7,5 &= 0 \cdot r + 0 \cdot s \\ 6 &= -4 \cdot r + 12 \cdot s \end{aligned}$$

In Zeile 2 ist nun einen Widerspruch, so dass es keine Lösung gibt. In diesem Fall muss noch geprüft werden, ob die Geraden parallel oder windschief zueinander liegen. Dazu werden die Richtungsvektoren auf lineare Abhängigkeit untersucht. Dabei ist:

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also sind die Geraden parallel.

<u>Beispiel 3:</u>

$$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad h : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Prüfen, ob die Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind: Gibt es eine Zahl k, so dass folgende Gleichung gilt:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\text{Zeile 1} \qquad k = \frac{3}{4} \\ &\text{Zeile 2} \qquad k = \frac{5}{8} \\ &\text{Zeile 3} \qquad k = \text{keine Lösung möglich} \end{aligned}$$

Die jeweiligen Zeilen liefern also verschiedene Werte für k, d.h. die Richtungsvektoren sind linear unabhängig.
Um zu prüfen, ob die beiden Geraden noch einen Schnittpunkt haben oder windschief zueinander liegen, werden die Richtungsvektoren $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ und der Vektor $\overrightarrow{q} - \overrightarrow{p}$ zwischen den Stützvektoren auf lineare Abhängigkeit untersucht. Dabei ist zu prüfen, ob es Zahlen a, b und c ungleich Null gibt, so dass folgende Gleichung gilt:

$$a \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} 1-4 \\ 8-5 \\ 16-8 \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Eingabe eines „solve“-Befehls in den Taschenrechner leifert: Die drei Vektoren sind linear unabhängig.

Oder: Gleichsetzen der beiden Geraden und Aufstellen des LGS:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} - r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Wir ziehen das Doppelte der Zeile 1 von der Zeile 2 ab. Aus der Zeile 3 lässt sich ersehen, dass $-7 \cdot r = -8$ ist, womit wir den ersten Wert für r erhalten.

$$\begin{aligned} 3 &= 4 \cdot t - 3 \cdot r \qquad & 3 &= 4 \cdot t - 3 \cdot r \\ -3 &= 8 \cdot t - 5 \cdot r & -9 &= 0 \cdot t + 1 \cdot r \\ -8 &= -7 \cdot r & r &= \frac{8}{7} \end{aligned}$$

Aus Zeile 2 ergibt sich $r = -9$, was im Widerspruch zu Zeile 3 steht. Damit hat das LGS keine Lösung und die Geraden müssen somit windschief zueinander liegen, da die Richtungsvektoren linear unabhängig sind.

<u>Beispiel 4:</u>

$$f : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad d : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die beiden Geraden werden gleichgesetzt und das LGS gelöst.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Aus Zeile 1 folgt $r = -s$, dies kann in Zeilen 2 und 3 eingesetzt werden.

$$\begin{aligned} 0 &= -s - r \qquad & r &= -s \\ 6 &= s - 2 \cdot r & 6 &= s - 2 \cdot (-s) \\ -6 &= 2 \cdot s + 5 \cdot r & -6 &= 2 \cdot s + 5 \cdot (-s) \end{aligned}$$

Somit ergibt sich in Zeieln 2 und 3:

$$\begin{aligned} 6 &= 3 \cdot s \qquad & 2 &= s \\ -6 &= -3 \cdot s & 2 &= s \end{aligned}$$

Es ergbit sich $s = 2$ und damit $r = -2$. Das LGS hat also eine eindeutige Lösung und die beiden Geraden somit genau einen Schnittpunkt.

Dieser Punkt S wird durch Einsetzten von s oder r in die jeweilige Geradengleichung berechnet:

$$\overrightarrow{s} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 4-4 \\ -3+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{S} = (2|0|7)$$

2 Gegenseitige Lage zwischen einer Ebene und einer Gerade

Für diesen Abschnitt sind eine Gerade $g: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} + t \cdot \overrightarrow{u}$ und eine Ebene $E: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b} + \lambda \cdot \overrightarrow{v} + \mu \cdot \overrightarrow{w}$ vorgegeben, wobei die Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ die Stützvektoren, der Vektor $\overrightarrow{u}$ der Richtungsvektor der Geraden g und die Vektoren $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$ die Spannvektoren der Ebene sind.

2.1 Rechenwege

1. (a) Gleichsetzen der Gleichungen für Ebene und Gerade und ein LGS aufstellen:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} + t \cdot \overrightarrow{u} &= \overrightarrow{b} + \lambda \cdot \overrightarrow{v} + \mu \cdot \overrightarrow{w} \\ \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} &= \lambda \cdot \overrightarrow{v} + \mu \cdot \overrightarrow{w} - t \cdot \overrightarrow{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 - b_1 &= \lambda \cdot v_1 + \mu \cdot w_1 - t \cdot u_1 \\ a_2 - b_2 &= \lambda \cdot v_2 + \mu \cdot w_2 - t \cdot u_2 \\ a_3 - b_3 &= \lambda \cdot v_3 + \mu \cdot w_3 - t \cdot u_3 \end{aligned}$$

   (b) Das obige LGS nach den Koeffizienten λ, μ und t auflösen. Es werden dabei alle drei Gleichungen benötigt, da es auch drei Variablen gibt.

   (c) **Merke:**
   - Hat das LGS keine Lösung so liegt die Gerade parallel zur Ebene.
   - Hat das LGS genau eine Lösung, so gibt es genau einen Schnittpunkt zwischen Ebene und Gerade.
   - Hat das LGS unendlich viele Lösungen, so liegt die Gerade in der Ebene.

2. (a) Überprüfen, ob die **Spannvektoren** und der **Richtungsvektor** voneinander linear abhängig sind.

   (b) Sind diese drei Vektoren linear abhängig, so liegt der Richtungsvektor der Geraden in einer Ebene mit den beiden Spannvektoren. Die Gerade verläuft also entweder parallel zur Ebene oder in der Ebene.
   Nun wird eine Punktprobe mit dem **Stützvektor** der Geraden und der **Ebene** durchgeführt.
   Ist die Punktprobe positiv, so ist die Gerade ein Teil der Ebene.

   (c) Sind die drei Vektoren aus (a) linear unabhängig, so liegen diese drei Vektoren nicht in einer Ebene. Somit schneidet die Gerade irgendwo die Ebene.
   Der Schnittpunkt wird z.B. mit Rechenweg 1. bestimmt.

2.2 Beispiele

Beispiel 1:

$$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ -20 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad E : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ 13 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Die beiden Gleichungen werden gleichgesetzt und das LGS aufgstellt:

$$\begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ -20 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ 13 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ -20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ 13 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} - r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 11 &= 2 \cdot \lambda - 4 \cdot \mu + r \\ -6 &= \lambda + 3 \cdot \mu - r \\ -33 &= -6 \cdot \lambda + 12 \cdot \mu - 3 \cdot r \end{aligned}$$

Es ist am leichtesten den Koeffizienten r als erstes aus zwei Gleichungen des LGS zu entfernen: dazu wird Zeile 1 zu Zeile 2 addiert und das Dreifache von Zeile 1 zu Zeile 3 addiert.

$$\begin{aligned} 11 &= r + 2 \cdot \lambda - 4 \cdot \mu \\ -6 &= -r + \lambda + 3 \cdot \mu \\ -33 &= -3 \cdot r - 6 \cdot \lambda + 12 \cdot \mu \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 11 &= r + 2 \cdot \lambda - 4 \cdot \mu \\ 5 &= 0 \cdot r + 3 \cdot \lambda - \mu \\ 0 &= 0 \cdot r + 0 \cdot \lambda + 0 \cdot \mu \end{aligned}$$

An der Zeile 3 ist zu erkennen, dass dieses LGS unendlich viele Lösungen hat, somit muss die Gerade ein Teil der Ebene sein. Aus Zeile 2 lässt sich eine andere Darstellung der Geraden g konstruieren.

Beispiel 2:

$$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad E : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -15 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Als erstes wird geprüft, ob die Spannvektoren und der Richtungsvektor linear abhängig voneinander sind, also ob die folgende Gleichung eine Lösung für a, b und c hat, die nicht Null ist:

$$a \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = b \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -15 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Lösung ist: $a = 1$, $b = -\frac{1}{3}$ und $c = 1$, also sind die drei Vektoren linear abhängig.
Dann muss noch eine Punktprobe erfolgen und zwar mit dem Stützpunkt von g und E:

$$\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}5\\0\\-15\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix}5\\0\\-15\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$$

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} -1 &= 5 \cdot \lambda & \lambda &= -\frac{1}{5} \\ -3 &= -\mu & \mu &= 3 \\ -2 &= -15 \cdot \lambda + 2 \cdot \mu \end{aligned}$$

Werden die beiden Werte in Zeile 3 eingesetzt, ergibt sich: $-2 = -15 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) + 2 \cdot 3 = 3 + 6 = 9$ ein Widerspruch. Somit verläuft die Gerade parallel zur Ebene.

Das folgende Beispiel entspammt den Vorträge im Mai 2017.
<u>Beispiel 3:</u>

$$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix} \qquad E : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}-2\\5\\0\end{pmatrix}$$

E und g gleichsetzen und das LGS aufstellen:

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}-2\\5\\0\end{pmatrix}$$

Zeile 3 liefert sofort $t = \frac{1}{2}$ und dann wird noch Zeile 1 von Zeile 2 subtrahiert.

$$\begin{aligned} 1 &= 3 \cdot \lambda - 2 \cdot \mu & 1 &= 3 \cdot \lambda - 2 \cdot \mu \\ 2 &= 3 \cdot \lambda + 5 \cdot \mu - 2 \cdot t & 1 &= 7 \cdot \mu - 2 \cdot t \\ -2 &= -4 \cdot t & t &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Es folgt aus Zeile 2, dass $\mu = \frac{2}{7}$ und damit dann aus Zeile 1, dass $1 = 3 \cdot \lambda - 2 \cdot \frac{2}{7}$. Also ergibt sich für $\lambda = \frac{11}{21}$.
Das LGS hat genau eine Lösung, somit gibt es einen Schnittpunkt, der mit Hilfe der Geraden-

gleichung bestimmt wird, indem der Wert für t dort eingesetzt wird:

$$\overrightarrow{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 \\ -1+1 \\ 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{S} = (1|0|2)$$

3 Weitere Formen von vektoriellen Ebenengleichungen

3.1 Das Skalaprodukt

Das **Skalaprodukt** ist eine Verknüpfung zwischen zwei Vektoren, welche als Ergebnis eine reelle Zahl liefert. Dabei werden zwei Vektoren wie folgt miteinander multipliziert:

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Das Skalaprodukt dient zur Bestimmung von Winkeln zwischen zwei Vektoren; wenn das Skalaprodukt zweier Vektoren Null ist, stehten diese Vektoren senkrecht zueinander.

Beispiel:

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 - 2 \cdot 8 + 4 \cdot 4 = -16 + 16 = 0$$

3.2 Normalform der Ebene

Die Normalform wird mit Hilfe eines Vektors erzeugt, der im rechten Winkel auf der Ebene steht. Dieser Vektor heißt daher auch **Normalenvektor** der Ebene. Der Normalenvektor hat die Eigenschaft senkrecht zu beiden Spannvektoren zu stehen und wird mit $\overrightarrow{n}$ notiert.
Die Ebene in Normalenform sieht im Allgemeinen so aus:

$$E : 0 = \overrightarrow{n} \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{p})$$

Dabei ist $\overrightarrow{p}$ der Stützvektor der Ebene und $\overrightarrow{x}$ der Ortsverktor zu einem beliebigem Punkt X in der Ebene.

Beispiel:

$P = (3|4|7)$ und $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Die Gleichung der Ebene E in Normalenform lautet somit also: $E : 0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - 3 \\ x_2 - 4 \\ x_3 - 7 \end{pmatrix}$.

Wird das Skalaprodukt ausgerechnet ergibt sich die **Koordinatenform** der Ebene:

$$\begin{aligned} 0 &= -2 \cdot x_1 + 6 + 8 \cdot x_2 - 32 + 4 \cdot x_3 - 28 = -2 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 - 54 \\ 54 &= -2 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 \end{aligned}$$

Es ist also jederzeit möglich, den Normalenvektor aus der Koordinatenform der Ebene abzulesen.