TEMA 9
LÍMITES DE FUNCIONES, CONTINUIDAD Y RAMAS INFINITAS

9.1. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO. LÍMITES LATERALES

• 9.1.1. Concepto de tendencia

Decimos que "*x tiende a* x_0" si *x* toma los valores de una sucesión que se aproxima a x_0. Se simboliza por medio de $x \to x_0$.

Decimos que "*x tiende a* x_0 *por la izquierda*" si *x* toma valores menores que x_0 que se aproximan cada vez más a x_0. Se simboliza por medio de $x \to x_0^-$.

Diremos que "*x tiende a* x_0 *por la derecha*" si *x* toma valores mayores que x_0 que se aproximan cada vez más a x_0. Se simboliza mediante $x \to x_0^+$.

EJEMPLO:

La sucesión de valores de la variable x:

1,8, 1,7, 1,6, 1,5, 1,4, 1,3, 1,2, 1,1, 1,01, 1,001, 1,0001,…

Es una sucesión de valores que se aproxima al valor 1 para valores mayores que 1. Diremos que x tiende a 1 por la derecha y se denota como $x \to 1^+$.

Sea una sucesión de valores que toma la variable x:

0,7, 0,8, 0,9, 0,91, 0,93, 0,94, 0,95, 0,98,…

Esta sucesión de valores de x se aproxima a 1 para valores menores que 1; diremos que x tiende a 1 por la izquierda y se denota como $x \to 1^-$

9.1. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO. LÍMITES LATERALES

• 9.1.2. Límites laterales. Concepto de límite. (1/3)

Sea la función $f(x)=x^2$.

Consideremos una secuencia de valores de x que se aproximan a 2 por la izquierda así como sus imágenes.

x	1,9	1,92	1,96	1,98	1,99	1,998
f(x)	3,61	3,686	3,842	3,92	3,96	3,992

Podemos observar que las imágenes se aproximan a 4. Diremos que $\lim_{x\to 2^-} f(x)=4$.

Consideremos ahora una secuencia de valores de x que se aproximan a 2 por la derecha así como sus imágenes.

x	2,3	2,2	2,1	2,01	2,001	2,0001
f(x)	5,29	4,84	4,41	4,04	4,004	4,0004

Podemos observar que las imágenes se aproximan a 4. Diremos que $\lim_{x\to 2^+} f(x)=4$. El ejemplo que hemos considerado define los límites laterales de la función cuadrática $f(x)=x^2$ en el punto *x=2*.

9.1. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO. LÍMITES LATERALES

- ## 9.1.2. Límites laterales. Concepto de límite (2/3)

Diremos que $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = M$ si, cuando la variable se aproxima a x_0 **con valores menores** que dicho número, entonces los valores de sus imágenes se aproximan al número *M*. A dicho límite se le denomina límite lateral por la izquierda de *f(x)* en el punto $x = x_0$.

Diremos que $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = N$ si, cuando la variable se aproxima a x_0 **con valores mayores** que dicho número, entonces los valores de sus imágenes se aproximan al número *N*. A dicho límite se le denomina límite lateral por la derecha de *f(x)* en el punto $x = x_0$.

Diremos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ si existen sus dos límites laterales y además coinciden.

9.1. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO. LÍMITES LATERALES

• 9.1.2. Límites laterales. Concepto de límite. (3/3)

EJEMPLO:

Sea la función $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & x\le 3 \\ 2 & x>3 \end{cases}$.

Si deseamos calcular $\lim_{x\to 3} f(x)$, calcularemos los dos límites laterales: $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ y $\lim_{x\to 3^+} f(x)$.

Con la siguiente tabla analizamos la tendencia de la función a la izquierda de 3 y obtenemos que $\lim_{x\to 3^-} f(x)=5$:

x	2,5	2,7	2,9	2,91	2,93	2,95	2,97	2,99	2,995	2,999	$\to 3^-$
f(x)	4	4,4	4,8	4,82	4,86	4,9	4,94	4,98	4,99	4,998	$\to 5$

Para el estudio de la tendencia de la función a la derecha de 3 consideramos la siguiente tabla:

x	3,5	3,4	3,2	3,1	3,05	3,02	3,01	3,005	3,002	3,001	$\to 3^+$
f(x)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	

Se deduce que $\lim_{x\to 3^+} f(x)=2$

9.1. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO. LÍMITES LATERALES

- ## 9.1.3. Límites laterales cuyo resultado es infinito. (1/2)

EJEMPLO. Consideremos la función $f(x)=1/x$.

Analicemos por medio de tablas las tendencias por la izquierda y por la derecha de x=0.

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$:

x	-0,3	-0,2	-0,1	-0,05	-0,01	-0,005	-0,001	-0,0005	-0,0001	-0,00001	$x\to 0^-$
f(x)	-3,3333	-5	-10	-20	-100	-200	-1000	-2000	-10000	-100000	$f(x)\to -\infty$

Si x tiende a 0 por la derecha observamos en la tabla que la imagen se hace cada vez más grande; diríamos que $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$.

x	0,3	0,2	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001	0,0005	0,0001	0,00001	$x\to 0^+$
f(x)	3,33333	5	10	20	100	200	1000	2000	10000	100000	$f(x)\to +\infty$

9.1. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO. LÍMITES LATERALES

- ## 9.1.3. Límites laterales cuyo resultado es infinito (2/2)

Diremos que $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ si cuando la variable se aproxima a x_0 **con valores menores** que dicho número, entonces los valores de sus imágenes se hacen infinitamente grandes.

Diremos que $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ si cuando la variable se aproxima a x_0 **con valores menores** que dicho número, entonces los valores de sus imágenes se hacen infinitamente pequeñas.

Diremos que $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ si cuando la variable se aproxima a x_0 **con valores mayores** que dicho número, entonces los valores de sus imágenes se hacen infinitamente grandes.

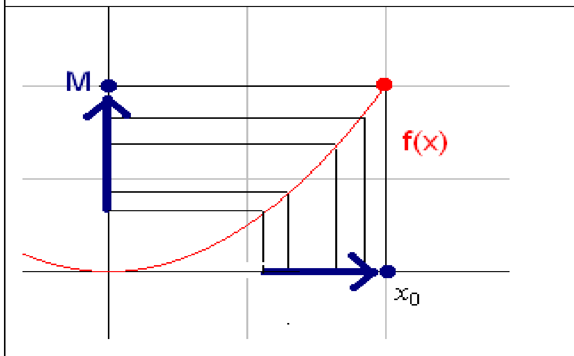
Diremos que $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$ si cuando la variable se aproxima a x_0 **con valores mayores** que dicho número, entonces los valores de sus imágenes se hacen infinitamente pequeñas.

Diremos que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ si existen sus dos límites laterales y además coinciden. Si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ diremos que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$. Y de igual forma si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ entonces diremos que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

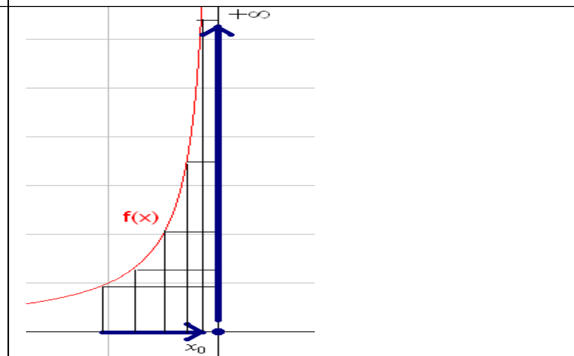
9.1. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO. LÍMITES LATERALES

- ## 9.1.4. Significado geométrico de los límites laterales

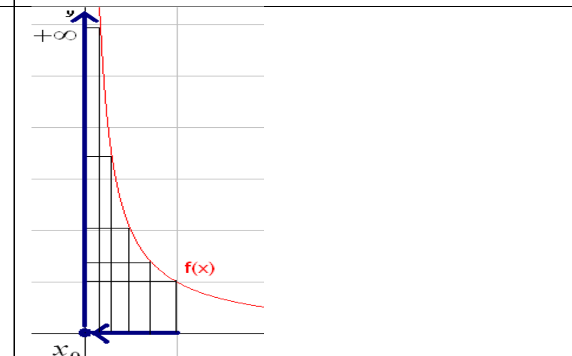
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = M$$



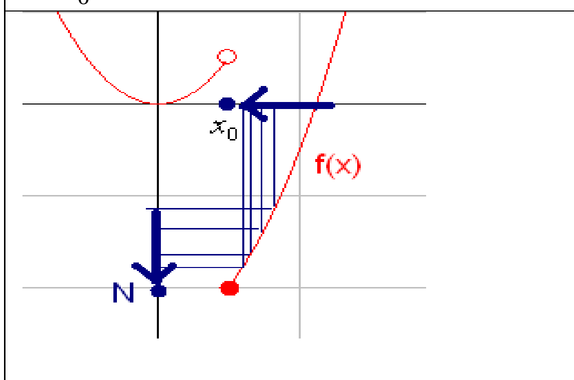
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$$



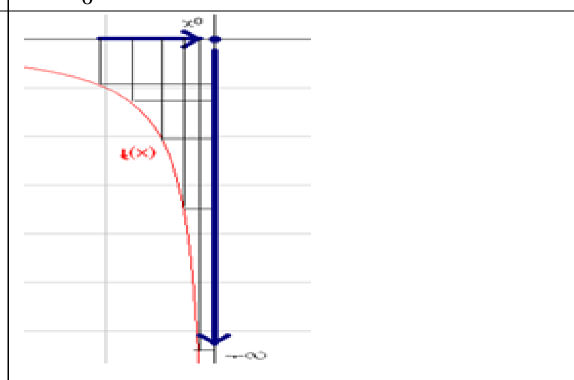
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$$



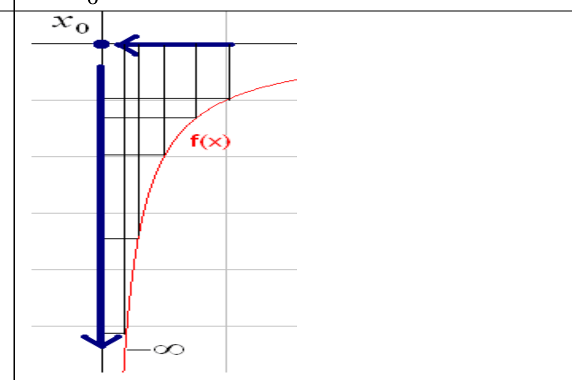
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = N$$



$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$$



9.1. EJERCICIOS

1. Sea la función: $f(x)=\begin{cases} -1/(x+1) & x<-1 \\ 1 & -1\leq x<0 \\ -2x+1 & 0\leq x<1 \\ (x-1)^2 & x\geq 1 \end{cases}$

Representa su gráfica y, a partir de ella, calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ f) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ g) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ h) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

2. Interpreta gráficamente el significado de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=-\infty$ b) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=+\infty$ c) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=-1$

d) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=5$ e) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=0$ f) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=-3$

g) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$ h) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=2$

9.2. PROPIEDADES DE LOS LÍMITES.

• 9.2.1. Reglas básicas del cálculo de límites

Función constante	$f(x) = K$	$\lim_{x \to x_0} K = K$
Función identidad	$f(x) = x$	$\lim_{x \to x_0} x = x_0$
Función exponencial	$f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$	$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$
Función potencial de exponente natural	$f(x) = x^n, n \geq 2$	$\lim_{x \to x_0} x^n = {x_0}^n$
Función potencial de exponente entero negativo	$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}, n \geq 2$	$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{{x_0}^n}, x_0 \neq 0$
		$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$, si n es par
		$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$, si n es impar $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$ si n es impar
Función logarítmica	$f(x) = \log_a x, a > 1$	$\lim_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0$, $x_0 \neq 0$ $\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$
	$f(x) = \log_a x, 0 < a < 1$	$\lim_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0$, $x_0 \neq 0$ $\lim_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$

9.2. PROPIEDADES DE LOS LÍMITES.

• 9.2.2. Reglas básicas del cálculo de límites. Ejemplos

EJEMPLO.
Calcula los límites que se indican:

a) $\lim_{x\to 2} 5$ b) $\lim_{x\to 2} x$ c) $\lim_{x\to 3} x^3$ d) $\lim_{x\to -2} x^5$ e) $\lim_{x\to 3} 2^x$

f) $\lim_{x\to 5}\left(\frac{1}{3}\right)^x$ g) $\lim_{x\to 0} 5^x$ h) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x}\right)^3$ i) $\lim_{x\to 5}\frac{1}{x^2}$ j) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$

k) $\lim_{x\to 9}\sqrt{x}$ l) $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^3}$ m) $\lim_{x\to 2}\log_2 x$ n) $\lim_{x\to 5}\log_{1/5} x$ o) $\lim_{x\to 0^+}\log_2 x$

p) $\lim_{x\to 6}\sqrt[3]{x}$ q) $\lim_{x\to 6} 7$ r) $\lim_{x\to -1} x^5$ s) $\lim_{x\to 8}\log_{1/2} x$ t) $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^5}$ u) $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^4}$

9.2. PROPIEDADES DE LOS LÍMITES.

• 9.2.2. Propiedades algebraicas de los límites.

Si $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$ y $\lim_{x\to x_0} g(x)=B$, con A,B finitos, entonces se verifica:

a) $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=A+B$

b) $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-g(x)\right)=A-B$

c) si $k\in R, k\neq 0$, $\lim_{x\to x_0}\left(k\cdot f(x)\right)=k\cdot A$

d) $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=A\cdot B$

e) $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)/g(x)\right)=A/B$ si $B\neq 0$

f) si $A^B\in R$, $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{g(x)}=A^B$

g) $\lim_{x\to x_0}\log_a f(x)=\log_a\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)=\log_a A$ si $A>0$

EJEMPLO:

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 1} 7x^3-6x^2+\sqrt{10\cdot x^3-6^x}$

b) $\lim_{x\to -1}\dfrac{4x-7}{x^2+2}$

c) $\lim_{x\to 2}\left(5x^3-\log_2 x\right)^{(3^x-4x)}$

d) $\lim_{x\to 3}\left(x+x^2-5\right)^5-\left(4^x-\dfrac{1}{3^x}\right)$

9.2. EJERCICIOS.

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1} 4x^5-2x^4-3$

b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x-1}{x^2+3}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} (4x-2)^{(x^3+2)}$

d) $\lim\limits_{x\to 2} 4^{(x^2+1)}$

e) $\lim\limits_{x\to 4} \log_2 x+4$

f) $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{3x^2+2x+4}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} (5x-3)^2$

h) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{4x+3}{x-1}$

i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{x+5}}{x+6}$

j) $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{3x+2}+x^3$

k) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{1+2x}{\sqrt{x+4}}$

m) $\lim\limits_{x\to -2} \left(\log_3(4x^4-37)\right)$

9.3. CÁLCULO DE LÍMITES.

• 9.3.1. Cálculo de límites infinitos (1/2).

Para calcular el límite $\lim_{x\to 1}\frac{3x}{x^2-1}$. Calculamos los límites del numerador y denominador obtenemos: $\lim_{x\to 1} 3x = 3$ y $\lim_{x\to 1}(x^2-1)=0$. Sin embargo no podemos efectuar la operación $\frac{3}{0}$, ya que no es una operación definida. Para determinar si existe límite estudiamos los dos límites laterales:

a) Si tomamos una secuencia de valores que se aproximan a 1 por la izquierda

x	0,7	0,8	0,9	0,99	0,999
Numerador	2,1	2,4	2,7	2,97	2,997
Denominador	-0,51	-0,36	-0,19	-0,02	-0,002

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{3x}{x^2-1}=\frac{3}{0^-}=-\infty$$

b) Si tomamos una secuencia de valores que se aproximan a 1 por la derecha:

X	1,3	1,2	1,1	1,01	1,001
Numerador	3,9	3,6	3,3	3,03	3,003
Denominador	0,69	0,44	0,21	0,0201	0,002

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{3x}{x^2-1}=\frac{3}{0^+}=+\infty$$

EJEMPLOS:

Determina la existencia de los siguientes límites analizando los límites laterales, y realiza una interpretación gráfica del resultado obtenido:

a) $\lim_{x\to -1}\frac{3x}{x^2-1}$ b) $\lim_{x\to 2}\frac{-3}{x^2-4}$

9.3. CÁLCULO DE LÍMITES.

• 9.3.2. Comportamiento de una función en el infinito (1/2)

EJEMPLO: Dada la función $f(x) = x^2 + 2x - 1$.

Si consideramos una secuencia de valores crecientes cada vez más grandes obtendríamos

x	f(x)
100	10.199
1.000	1.001.999
10.000	100.019.999
100.000	10.000.199.999
1.000.000	1.000.001.999.999

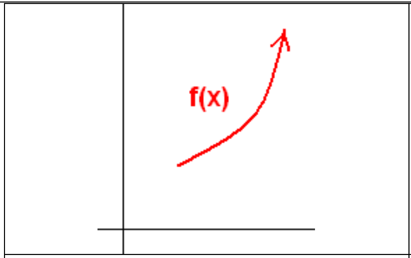
los valores de *f(x)* son cada vez más grandes, esto se traduce en $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Si consideramos una secuencia de valores decrecientes negativos cada vez más pequeños obtendríamos que los valores de *f(x)* son cada vez más grandes circunstancia que se traduce en: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

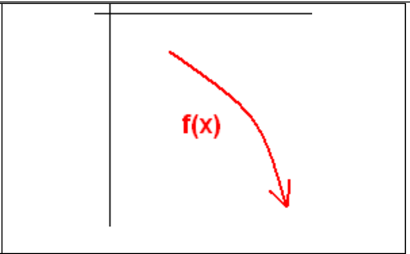
9.3. CÁLCULO DE LÍMITES.

• 9.3.2. Comportamiento de una función en el infinito (2/2)

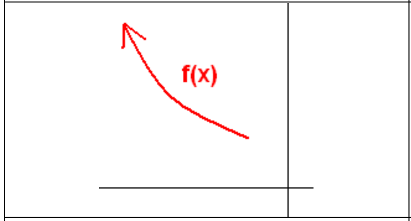
- Si cuando $x \to +\infty$ los valores de sus imágenes se hacen infinitamente grandes, entonces se verifica que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- Si cuando $x \to +\infty$ los valores de sus imágenes se hacen infinitamente pequeñas, entonces se verifica que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
- Si cuando $x \to -\infty$ los valores de sus imágenes se hacen infinitamente grandes, entonces se verifica que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
- Si cuando $x \to -\infty$ los valores de sus imágenes se hacen infinitamente pequeñas, entonces se verifica que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.



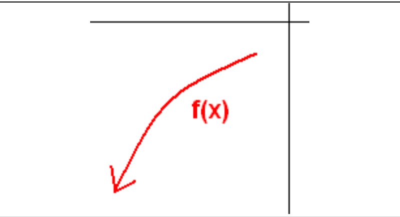
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$



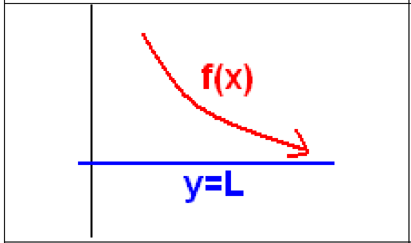
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$



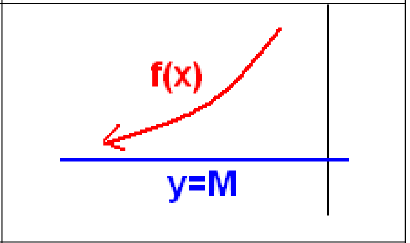
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$



$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$



$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$



$\lim_{x\to-\infty} f(x) = M$

9.3. CÁLCULO DE LÍMITES.

• 9.3.3. Cálculo de límites en el infinito: funciones polinómicas

Si $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ es un polinomio se verifica siempre que $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} a_nx^n$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} a_nx^n$, siendo a_nx^n el monomio de mayor grado de $p(x)$.

Donde

$$\lim_{x\to+\infty} a_nx^n=\begin{cases}+\infty & \text{si } a_n>0\\ -\infty & \text{si } a_n<0\end{cases} \quad \text{y}$$

$$\lim_{x\to-\infty} a_nx^n=\begin{cases}+\infty & \text{si } a_n>0\\ -\infty & \text{si } a_n<0\end{cases} \text{ (n par), } \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} a_nx^n=\begin{cases}-\infty & \text{si } a_n>0\\ +\infty & \text{si } a_n<0\end{cases} \text{ (n impar)}$$

EJEMPLOS:

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^4-x^3+2}{2x^3-3x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^4-x}{x^3+1}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2-2x}{3x^2+5}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2-3x}{5x^4+4}$

9.3. CÁLCULO DE LÍMITES

- ## 9.3.3. Cálculo de límites en el infinito.

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Se verifican: $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & a>1 \\ 0 & 0<a<1 \end{cases}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 & a>1 \\ +\infty & 0<a<1 \end{cases}$ **y** $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & a>1 \\ -\infty & 0<a<1 \end{cases}$

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES EN EL INFINITO

Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=A$ y $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=B$, con A,B$\in R\cup\{+\infty,-\infty\}$,entonces se verifica:

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)+g(x)\right)=A+B$

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-g(x)\right)=A-B$

c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=A\cdot B$

d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)/g(x)\right)=A/B$

e) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)\right)^{g(x)}=A^B$,

teniendo en cuenta las reglas

$\infty+\infty=+\infty$	$(-\infty)+(-\infty)=-\infty$
$\infty+k=+\infty$	$-\infty+k=-\infty$
$\infty\cdot k=+\infty, si\ k>0$	$\infty\cdot k=+\infty, si\ k<0$
$-\infty\cdot k=-\infty, si\ k>0$	$-\infty\cdot k=+\infty, si\ k>0$
$\infty\cdot\infty=\infty$	
$\infty^{\infty}=\infty$	$\infty^{k}=\infty\ si\ k>0$
$k^{\infty}=0,\ si\ 0<k<1$	$k^{\infty}=+\infty,\ si\ k>1$
$\dfrac{k}{\pm\infty}=0$	

9.3. CÁLCULO DE LÍMITES

- ## 9.3.3. Cálculo de límites en el infinito (EJEMPLOS)

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(2^x\cdot(\log_{1/3}x)\right)$ b) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}\cdot x^2$ c) $\lim_{x\to\infty}(x^2-2)^{x+1}$ d) $\lim_{x\to-\infty}\left((0,2)^x+(1/3)^x\right)$

5.3. EJERCICIOS

1. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to+\infty} -3x^3+2x^2-5$ b) $\lim_{x\to+\infty} 4x^4+2x^2+5$ c) $\lim_{x\to+\infty} 6x^7+9$

d) $\lim_{x\to-\infty} -3x^3+2x^2-5$ e) $\lim_{x\to-\infty} 4x^4+2x^2+5$ f) $\lim_{x\to-\infty} 6x^7+9$

2. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+x-7}{2x+1}$ b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5+2x+3}{x^3+2x-1}$ c) $\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^2+x-7}{2x+1}$

d) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^5+2x+3}{x^3+2x-1}$ e) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5+2x-3}{2x^5-2x-1}$ f) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^5+2x-3}{2x^5-2x-1}$

g) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-3x-3}{x^5-2x+7}$ h) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x-3}{x^5-2x+7}$

9.3. CÁLCULO DE LÍMITES

9.3.4. Indeterminaciones

a) Indeterminación $\boxed{\infty - \infty}$:

En gran parte de los casos basta realizar las operaciones indicadas.

Ejemplo: $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x^2}{x^2-1} \right) = \left(\frac{2}{0} - \frac{1}{0} \right) = (\infty - \infty)$. Operando queda:

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x^2}{x^2-1} \right) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{(x+1)^2 - x^2}{x^2-1} \right) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{2x+1}{x^2-1} \right) = \left(\frac{3}{0} \right) = \infty$$

En otros casos, sobre todo en los que intervienen radicales, basta multiplicar y dividir por la expresión radical conjugada.

Ejemplo: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x - \sqrt{x^2-1} \right) = (\infty - \infty) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)}{\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)} =$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\left(x^2 - (x^2-1)\right)}{\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)} = \left(\frac{1}{\infty} \right) = 0$$

b) Indeterminación $\boxed{0 \cdot \infty}$:

En gran parte de los casos basta realizar las operaciones indicadas.

Ejemplo: $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x^2}{x-1} \cdot \frac{x+1}{x^2} \right) = (0 \cdot \infty) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x+1}{x-1} \right) = -1$

c) Indeterminación $\boxed{\frac{0}{0}}$:

Cuando solo aparecen funciones racionales, basta descomponer factorialmente el numerador y el denominador.

Ejemplo: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3}{2}$

Si intervienen radicales, se multiplica y divide por la expresión radical conjugada.

Ejemplo: $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x}{1 - \sqrt{1-x}} \right) = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x\,(1 + \sqrt{1-x})}{(1 - \sqrt{1-x})\,(1 + \sqrt{1-x})} \right) =$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x + x\sqrt{1-x}}{x} \right) = \lim_{x \to 0} \left(1 + \sqrt{1-x} \right) = 2$$

d) Indeterminación $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$:

En muchos casos basta dividir el numerador y el denominador por la mayor potencia de la variable x, tanto si las expresiones son racionales como radicales.

Ejemplo: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^2 + x - 1}{x^2 + 1} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4 + \dfrac{x}{x^2} - \dfrac{1}{x^2}}{1 + \dfrac{1}{x^2}} = 4$

En el caso más simple que es el de las funciones racionales (cocientes de polinomios) se puede resumir en tres casos:

- Grado del numerador mayor que el del denominador, límite infinito.
- Grado del numerador menor que el del denominador, límite cero.
- Grados iguales, el límite coincide con el cociente de los coeficientes principales.

e) Indeterminaciones $\boxed{\infty^0,\ 0^0,\ 1^\infty}$:

Para resolver estos límites deberá tenerse en cuenta que $f(x)^{g(x)} = e^{L\left[f(x)^{g(x)}\right]} = e^{g(x)L[f(x)]}$, de donde resulta que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)L[f(x)]}$. Asi se transforma en un producto.

En el caso de la indeterminación $\boxed{1^\infty}$, o sea si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 1$ también es cierto que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)[f(x) - 1]}$

Ejemplo: $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}\right)^{\frac{1 + 3x^2}{x^2}} = \left(1^\infty\right) = \lim\limits_{x \to 0} e^{\left(\frac{1 + 3x^2}{x^2}\right)\left(\frac{1 + x^2}{1 - x^2} - 1\right)} =$

$$\lim_{x \to 0} e^{\left(\frac{1 + 3x^2}{x^2}\right)\left(\frac{2x^2}{1 - x^2}\right)} = \lim_{x \to 0} e^{\left(\frac{2 + 6x^2}{1 - x^2}\right)} = e^2$$

En el tema 4 se estudiará la regla de L´Hôpital-Bernoulli que permitirá, utilizando las derivadas de las funciones que intervienen en el límite, la resolución de cualquiera de los 7 casos de indeterminación.

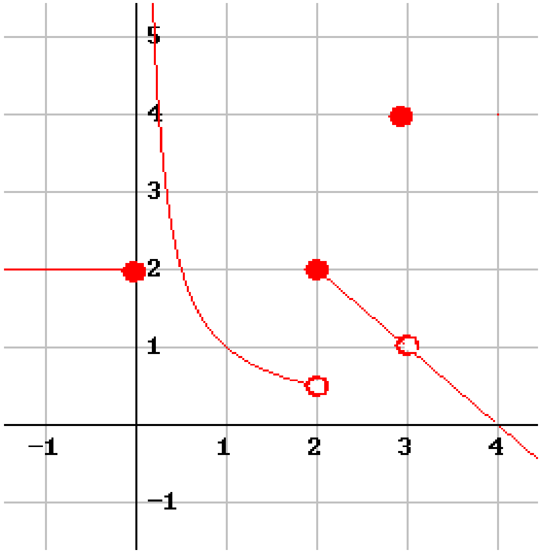
9.4. CONTINUIDAD Y DISCONTINUIDAD DE FUNCIONES

• 9.4. 1.Continuidad de una función en un punto

EJEMPLO: Sea la función

$$f(x)=\begin{cases} 2 & si \quad x\le 0 \\ 1/x & si \quad 0<x<2 \\ -x+4 & si \quad 2\le x<3 \\ 4 & si \quad x=3 \\ -x+4 & si \quad x>3 \end{cases}$$

cuya gráfica es



La gráfica está compuesta por varias curvas separadas, y con varios saltos en su representación en los puntos *x=0*, *x=2* y *x=3*.

En estos puntos diremos que la función no es continua, es decir, que la función tiene discontinuidades en *x=0*, *x=2* y *x=3*.

¿Cuál es la razón analítica de estas discontinuidades?

9.4. CONTINUIDAD Y DISCONTINUIDAD DE FUNCIONES

- ## 9.4.1. Continuidad de una función en un punto. Definición

Sea $f: R \to R$ una función real de variable real, y sea x_0 un punto del dominio de la función, diremos que la función f es **continua** en x_0 si se verifica:

1) existe $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ (con L un valor finito) y
2) $f(x_0) = L$.

EJEMPLO:

Determina si la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} 2x-3 & si \quad x \le 1 \\ x^2+1 & si \quad 1 < x \le 2 \\ 5/(x-2) & si \quad x > 2 \end{cases}$$

es continua en *x=1, x=0* y *x=2*.

9.4. CONTINUIDAD Y DISCONTINUIDAD DE FUNCIONES

• 9.4. 2. Tipos de discontinuidades.

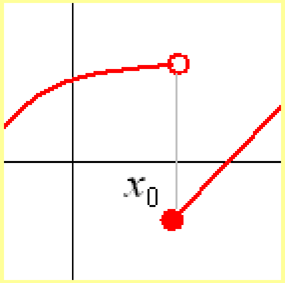
Existen tres tipos de discontinuidades:

Una función $f(x)$ tiene una **discontinuidad evitable** en x_0 si existe $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ pero $f(x_0) \neq L$. En el ejemplo inicial la función tiene una discontinuidad evitable en x=3.

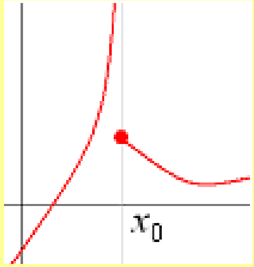
Una función $f(x)$ tiene una **discontinuidad inevitable de salto finito** en x_0 si no existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$ pero $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ y $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ son finitos. En el ejemplo inicial la función tiene una discontinuidad inevitable de salto finito en x=2.

Una función $f(x)$ tiene una **discontinuidad inevitable de salto infinito** en x_0 si no existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$ y uno de los dos límites laterales no es finito. En el ejemplo inicial la función tiene una discontinuidad inevitable de salto infinito en x=0

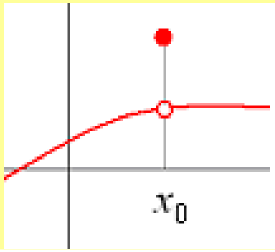
discontinuidad inevitable de salto finito:



discontinuidad inevitable de salto infinito:



discontinuidad evitable de salto finito



9.4. EJERCICIOS

1. Averigua si las siguientes funciones son continuas en x=0, y caso de no serlo determina su tipo de discontinuidad:

a) $f(x)=\begin{cases} x^3 & x\le 0 \\ x^2+2 & x>0 \end{cases}$ b) $g(x)=\begin{cases} e^x+1 & x\le 0 \\ 3x+2 & x>0 \end{cases}$

c) $h(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ 1 & x=0 \\ 2x & x>0 \end{cases}$ d) $i(x)=\begin{cases} 4^x & x\le 0 \\ \log x & x>0 \end{cases}$

2. Estudia para qué valores de a son continuas las siguientes funciones son continuas en x=2

a) $f(x)=\begin{cases} x+3 & x\le 2 \\ x^2+a & x>2 \end{cases}$ b) $g(x)=\begin{cases} 3^x & x\le 2 \\ ax^2+1 & x>2 \end{cases}$

3. Determina si las siguientes funciones son continuas en los puntos que se indican:

a) $f(x)=x^3-e^x+5^x$ en x=5 b) $g(x)=\dfrac{x\cdot e^x}{x+2}$ en x=1

9.5. RAMAS INFINITAS Y ASÍNTOTAS.

9.5.1. RAMAS INFINITAS.

Se dice que una función $y = f(x)$ tiene una **RAMA INFINITA** cuando x, $f(x)$ o ambas al mismo tiempo crecen infinitamente. De esta manera el punto $(x, f(x))$ se aleja infinitamente.

Podríamos distinguir tres posibilidades de ramas infinitas:

a) $(x, f(x))$ = (infinito, finito)

Es el caso de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ que cuando $x \to \infty$, entonces $f(x) \to 0$.

b) $(x, f(x))$ = (finito, infinito)

Tenemos la función $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ que cuando $x \to 1^+ \Rightarrow f(x) \to +\infty$ y cuando $x \to 1^- \Rightarrow f(x) \to -\infty$.

c) $(x, f(x))$ = (infinito, infinito)

Es el caso de la función $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-1}$

9.5.2. ASÍNTOTAS.

Algunas de estas ramas infinitas se aproximan a unas rectas determinadas que reciben el nombre de **ASÍNTOTAS.**

En consecuencia, podemos decir que las asíntotas son rectas tangentes a la gráfica de la función en el infinito, son rectas cuya distancia a la curva tiende a cero cuando la distancia al origen tiende a infinito.

Existen tres tipos de asíntotas: horizontales, verticales y oblicuas.

ASÍNTOTAS HORIZONTALES.

Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = l$, la recta $y = l$ es asíntota, pues la distancia $f(x) - l$ de la curva a la recta tiende a cero cuando nos alejamos del origen.

La situación de la curva respecto de la asíntota la podemos estudiar calculando los límites

$$\lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - l \right] \quad \text{y} \quad \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - l \right]$$

que nos dicen si la curva está por encima (0^+) o por debajo (0^-).

Una función puede tener como máximo dos asíntotas horizontales, correspondientes a cada uno de los límites en $+\infty$ y en $-\infty$: tendríamos una asíntota hacia la izquierda y otra hacia la derecha aunque frecuentemente la misma recta es asíntota por la izquierda y por la derecha.

En funciones racionales, si hay asíntota para $x \to +\infty$, la misma recta es asíntota para $x \to -\infty$. Sin embargo, en funciones con radicales suelen ser distintas.

La gráfica de una función puede cortar a la asíntota horizontal en uno o varios puntos, aunque en la mayoría de las funciones elementales la gráfica está por encima o por debajo de la asíntota.

Ejemplos.

- Calcular las asíntotas horizontales, si existen, de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 1}{x^2 - 1}$

  Veamos si existe el límite de la función cuando $x \to \pm\infty$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 5x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} 1 = 1$$

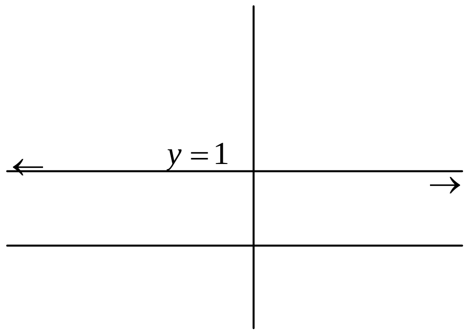
  Al existir el límite de la función cuando $x \to \pm\infty$ y ser finito, existe asíntota horizontal. Ésta será la recta $y = 1$.

  Para estudiar la posición de la gráfica de la función respecto de la asíntota horizontal, calculamos la diferencia $f(x) - 1$

$$f(x) - 1 = \frac{x^2 - 5x + 1}{x^2 - 1} - 1 = \frac{(x^2 - 5x + 1) - (x^2 - 1)}{x^2 - 1} = \frac{-5x + 2}{x^2 - 1}$$

- Entonces:

  - Si $x >> 0 \Rightarrow \dfrac{-5x + 2}{x^2 - 1} \to 0^-$ ya que el denominador crece más rápidamente que el numerador y éste es negativo. Esto nos indica que en $+\infty$ la gráfica de la función está por debajo de la asíntota horizontal.



  - Si $x << 0 \Rightarrow \dfrac{-5x + 2}{x^2 - 1} \to 0^+$ ya que el denominador crece más rápidamente que el numerador y éste es positivo. Esto nos indica que en $-\infty$ la gráfica de la función está por encima de la asíntota horizontal.

ASÍNTOTAS VERTICALES.

La recta $x = a$ es una ***asíntota vertical*** de la función $y = f(x)$ si se verifica que

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \qquad \text{o} \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

Así pues, para calcular las asíntotas verticales de una función, si es que tiene, hay que localizar los valores finitos de la variable x que hacen tender la función a $+\infty$ o a $-\infty$.

Podríamos establecer las siguientes observaciones sobre las asíntotas verticales:

- Una función puede tener infinitas asíntotas verticales, como la función tangente.
- La gráfica de la función no corta nunca a la asíntota vertical, ya que en los puntos donde existe asíntota no está definida la función.
- En las funciones racionales, las asíntotas verticales se hallan tomando los puntos que anulan el denominador.

- La situación de la gráfica de la función respecto de la asíntota vertical $x = a$ se obtiene calculando los límites laterales en $x = a$ y viendo si valen $+\infty$ o $-\infty$.

  También puede hacerse estudiando el signo de la función en las regiones en las que existe.

Ejemplo.

- Encontrar las asíntotas verticales de la función: $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

Para encontrar las asíntotas verticales de una función, buscaremos aquellos puntos donde la función tienda a infinito: por tratarse, en nuestro caso, de una función racional, para que la imagen tienda a infinito tendremos que anular el denominador.

$$\lim_{x\to a} \frac{x^3}{x^2-1} = \pm\infty \quad \Rightarrow \quad x^2-1=0 \quad \Rightarrow \quad x=\pm 1$$

Por tanto, tendremos dos asíntotas verticales: $x=+1$ y $x=-1$.

Veamos la posición de la gráfica de la función respecto a cada una de las asíntotas: para ello calcularemos los límites laterales de la función en cada una de los puntos.

- En $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{0^-\cdot 2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{0^+\cdot 2} = +\infty$$

- En $x = -1$:

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = \frac{-1}{-2\cdot 0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = \frac{-1}{-2\cdot 0^+} = +\infty$$

ASÍNTOTAS OBLICUAS.

La recta $y = mx+n$,, $m \neq 0$, es una asíntota oblicua de la función $y = f(x)$ si existe alguno de los límites siguientes:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - (mx+n) \right] = 0$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - (mx+n) \right] = 0$

En el primer caso se dice que la función tiene asíntota en $+\infty$, y en el segundo en $-\infty$.

Una determinada función puede tener asíntotas oblicuas de ambos tipos, de alguno o de ninguno de ellos, dependiendo de que existan los dos límites, sólo uno o ninguno.

La asíntota oblicua $y = mx + n$,, $m \neq 0$, quedará completamente determinada cuando conozcamos los valores de m y n.

Cálculo de la pendiente.

Para obtener la pendiente *m* de la recta, se calcula el valor hacia el que tiende el cociente de $f(x)$ por x cuando $x \to \pm\infty$:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Según el valor de m obtenido al calcular el límite en $\pm\infty$ pueden darse los siguientes casos:

a) Si m es un número real no nulo, la función tiene una asíntota oblicua en $+\infty$ ($-\infty$).

b) Si $m = \pm\infty$, la función no tiene asíntota oblicua en $+\infty$ ($-\infty$) y la rama correspondiente de la misma tiene la forma de la parábola vertical $y = x^2$.

c) Si $m = 0$, la función no tiene asíntota oblicua en $+\infty$ ($-\infty$). La rama correspondiente tiene la forma de la parábola $y = \sqrt{x}$.

Cálculo de la ordenada en el origen *n*.

Si m es un número real no nulo, se calcula n de la forma: $n = \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - mx \right]$

- Si n es finito, existe asíntota oblicua de ecuación $y = mx + n$.
- Si n no es finito, hay una rama parabólica en la dirección $y = mx$.

En las funciones racionales no es necesario utilizar límites para calcular los valores de m y n ya que se puede calcular directamente la asíntota mediante el siguiente procedimiento:

Las funciones racionales, si el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, pueden expresarse de la forma:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

sin más que hacer la división entera.

Para que el grado de $C(x)$ sea uno, la diferencia de grados entre numerador y denominador debe ser uno.

Al tender $x \to \pm\infty$, la fracción $\frac{R(x)}{Q(x)} \to 0$ y tendríamos que la asíntota oblicua sería $y = C(x)$.

Debemos tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- Una función puede tener como máximo dos asíntotas oblicuas correspondientes a cada uno de los límites.
- Las asíntotas horizontales y las oblicuas son mutuamente excluyentes.
- La gráfica de una función puede cortar a la asíntota oblicua en uno o varios puntos.
- La situación de la gráfica respecto de la asíntota oblicua se hace estudiando el signo de $f(x)-(mx+n)$ para valores grandes de x.

EJEMPLO

- Retomamos la función $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ y vamos a calcular sus asíntotas oblicuas, si existen.

  Primeramente, calculamos el límite de la función en $\pm\infty$ para estudiar la existencia o no de asíntotas horizontales:

  $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^2-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^2}\lim_{x\to\pm\infty}x=\pm\infty$$

  Al ser este límite infinito, no existen asíntotas horizontales. Veamos si existen oblicuas:

  - Calculamos el valor de la pendiente m:

  $$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x(x^2-1)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^3}=1$$

  - Calculamos el valor de la pendiente n:

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x(x^2-1)}{x^2-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$$

  Por tanto, existe asíntota oblicua para nuestra función que sería la recta de ecuación $y = x$.

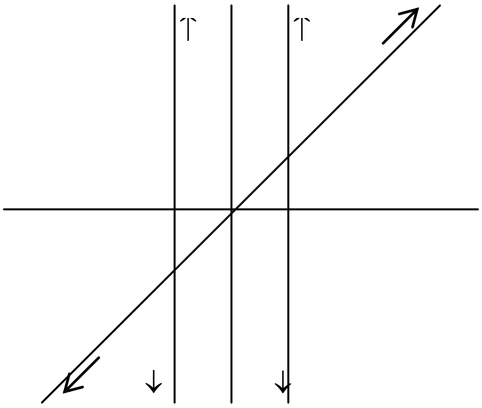
  - Veamos la posición de la gráfica de la función respecto de la asíntota vertical: Calculamos la diferencia entre la función y la asíntota, y estudiamos el signo para valores grandes de x, tanto positivos como negativos.

  $$f(x)-(mx+n)=\frac{x^3}{x^2-1}-x=\frac{x}{x^2-1}$$

    - Si $x>>0 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{x}{x^2-1}\to 0^+$ ya que tanto el numerador como el denominador son positivos, pero el denominador crece más rápidamente que el numerador.

    - Si $x<<0 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{x}{x^2-1}\to 0^-$ ya que tanto el numerador es negativo y el denominador es positivo, pero el denominador crece más rápidamente que el numerador.

- Gráficamente la situación de la curva (con las asíntotas verticales incluidas) sería:



EJERCICIOS PROPUESTOS.

- Calcular las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{x^2-5x+1}{x^2-1}$ y estudiar la posición de la curva respecto a ellas.
- Calcular las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ y estudiar la posición de la curva respecto a ellas.
- Calcular las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4x+4}$ y estudiar la posición de la curva respecto a ellas.
- Calcular las asíntotas de la función $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ y estudiar la posición de la curva respecto a ellas.
- Se considera en el plano la recta $x = 2$. Encontrara dos funciones cuyas gráficas admitan a dicha recta como asíntota y tengan distintas posiciones respecto a ella. Representar dichas posiciones.
- Calcular las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{x^2-3x+3}{x^2-4}$ y estudiar la posición de la curva respecto a ellas.
- Calcular las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{4x^2+3x+4}{x}$ y estudiar la posición de la curva respecto a ellas.
- Determinar el valor de la constante k sabiendo que la curva de ecuación $y=\dfrac{x^3+kx^2+1}{x^2+1}$ posee una asíntota que pasa por el punto $(1,3)$.

- Se considera la función f definida para $x \neq 1$ por $f(x) = \dfrac{2x-3}{|x-1|}$. Calcula los límites de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$ y cuando x tiende a $-\infty$ ¿Tiene la gráfica de la función f asíntotas horizontales? ¿Cuáles son?
- Se considera la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{Lx}, & \text{si } x \neq 1 \\ 1, & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

donde Lx denota el logaritmo neperiano de x.

1. Determinar el dominio de definición de f.
2. Determinar las asíntotas de f.