2019/20. 8. probléma

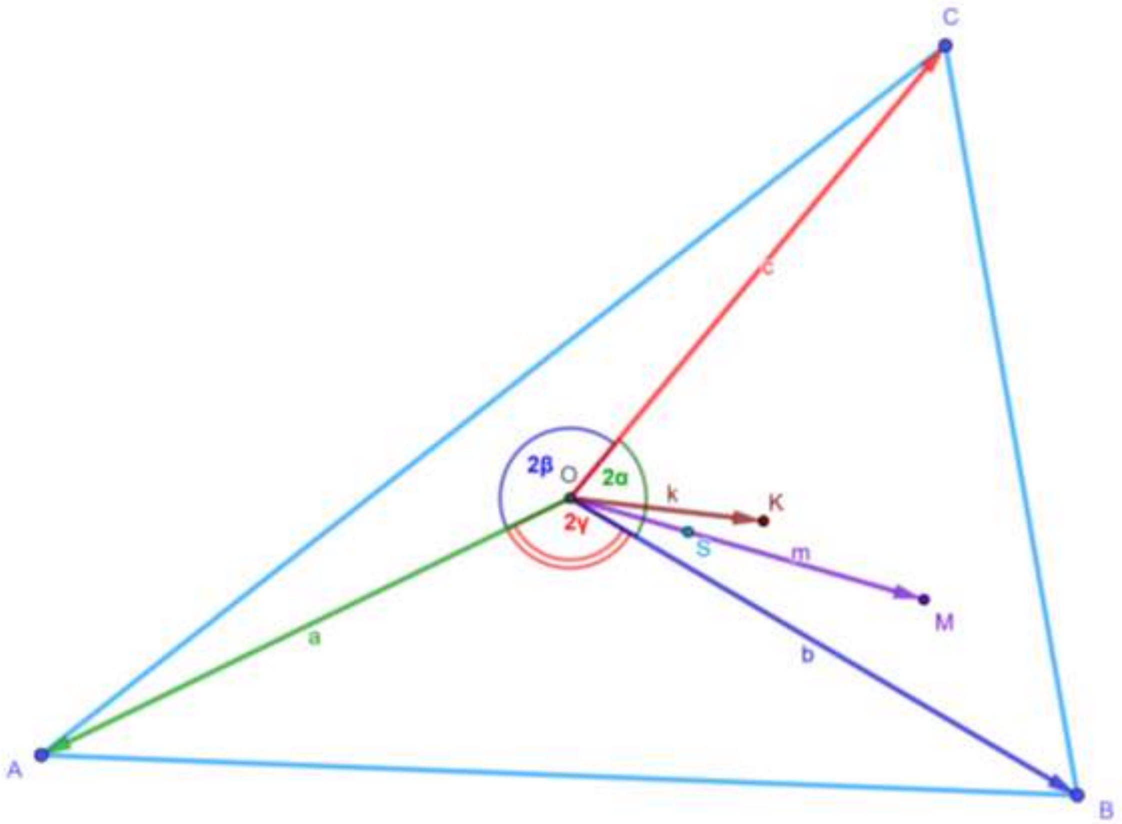
Egy háromszög oldalai *a*, *b*, *c*. Adjuk meg a háromszög

a) súlypontjának
b) magasságpontjának
c) beírt köre középpontjának

a háromszög köré írt körére vonatkozó hatványát!

Megoldás:

Készítsünk ábrát! Jelölje a háromszög köréírt körének középpontját *O*, beírt körének középpontját *K*, magasságpontját *M*, súlypontját *S*, területét *T*. A háromszög oldalhosszai: *a, b, c,* köré írt körének sugara $R=\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|$.



Mivel $\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{s}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ és $\vec{k}=\frac{a\cdot\vec{a}+b\cdot\vec{b}+c\cdot\vec{c}}{a+b+c}$, így

$$OM^2=\vec{m}^2=R^2+R^2+R^2+2\left(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}\right)=3R^2+2R^2(\cos 2\gamma+\cos 2\beta+\cos 2\alpha)=$$

$$=3R^2+2R^2(3-2\sin^2\gamma-2\sin^2\beta-2\sin^2\alpha)=9R^2-4R^2\sin^2\gamma-4R^2\sin^2\beta-4R^2\sin^2\alpha=$$

$$=9R^2-(a^2+b^2+c^2)$$

$$OS^2=\vec{s}^2=\frac{OM^2}{9}=R^2-\frac{a^2+b^2+c^2}{9}$$

$$OK^2=\vec{k}^2=\frac{R^2\left(a^2+b^2+c^2\right)+2R^2(ab\cos 2\gamma+ac\cos 2\beta+bc\cos 2\alpha)}{(a+b+c)^2}=$$

$$=\frac{R^2\left(a^2+b^2+c^2\right)+2R^2(ab-2ab\sin^2\gamma+ac-2ac\sin^2\beta+bc-2bc\sin^2\alpha)}{(a+b+c)^2}$$

$$=\frac{R^2\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\right)-ab4R^2\sin^2\gamma-ac4R^2\sin^2\beta-bc4R^2\sin^2\alpha}{(a+b+c)^2}=$$

$$=R^2-\frac{a^2bc+ab^2c+abc^2}{(a+b+c)^2}=R^2-\frac{abc(a+b+c)}{(a+b+c)^2}=R^2-\frac{abc}{a+b+c}$$

Innen a keresett hatványok:

$$H(M)=8R^2-(a^2+b^2+c^2)=\frac{8a^2b^2c^2}{16T^2}-\left(a^2+b^2+c^2\right)=$$

$$=\frac{8a^2b^2c^2}{2s(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)}-\left(a^2+b^2+c^2\right)=\frac{8a^2b^2c^2}{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}-\left(a^2+b^2+c^2\right)=$$

$$=\frac{8a^2b^2c^2}{\left((b+c)^2-a^2\right)\left(a^2-(c-b)^2\right)}-\left(a^2+b^2+c^2\right)=\frac{8a^2b^2c^2}{-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2}-\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$H(S)=-\frac{a^2+b^2+c^2}{9}$$

$$H(K)=-\frac{abc}{a+b+c}$$