Adriana Lanza

Il tasso di crescita

Sia y una grandezza che varia , in funzione del tempo, secondo la legge $y(t) = y_0 a^{\frac{t}{T}}$

dove a è un numero reale positivo diverso da 1 e y_0 è il valore che y assume nell'istante t=0.

Se a>1 la funzione è crescente, se a<1 y decresce e si parla di <<decadimento>>.

La grandezza T ha le dimensioni di un tempo e rappresenta il periodo di tempo dopo il quale

$$\boldsymbol{\frac{\Delta y}{y} = \frac{y(t+T) - y(t)}{y(t)} = \frac{y_0 a^{\frac{t+T}{T}} - y_0 a^{\frac{t}{T}}}{y_0 a^{\frac{t}{T}}} = \frac{y_0 a^{\frac{t}{T}+1} - y_0 a^{\frac{t}{T}}}{y_0 a^{\frac{t}{T}}} = \frac{y_0 a^{\frac{t}{T}}\ (a-1)}{y_0 a^{\frac{t}{T}}} = (a-1) = \text{costante}}$$

La costante $a - 1$ è è positiva in caso di crescita (a>1) e negativa in caso diminuzione o decadimento (0<a<1). Il suo valore dipende dall' ampiezza dell'intervallo di tempo in cui avviene la variazione e rappresenta il tasso di crescita (o di decadimento) o anche tasso di variazione, per un intervallo di tempo pari a T.

Seconsideriamo , per esempio, $y = y_0 3^{\frac{t}{10}}$ dove il tempo è misurato in minuti, la grandezza y cresce in modo che , ogni 10 minuti, $\frac{\Delta y}{y}$**=(3-1)→** $\boldsymbol{\Delta y = 2y}$ **(Fig1)**

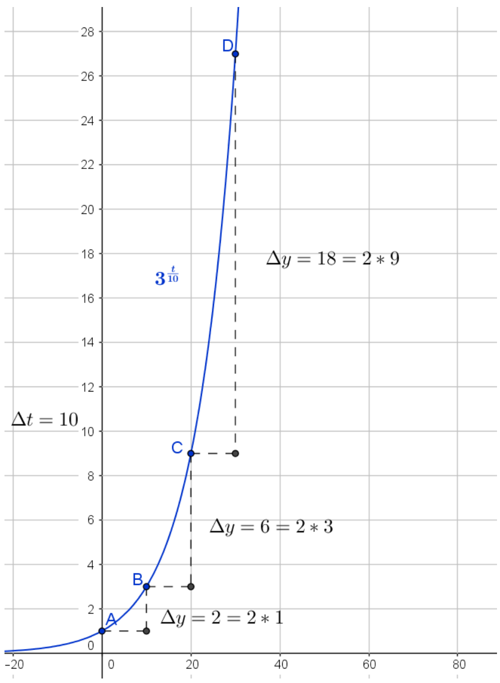


Fig.1

Possiamo definire un tasso di variazione medio $\frac{\Delta y}{y \Delta t}$, riferito a un intervallo Δt, in particolare unitario , e un tasso di variazione istantaneo $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{y \Delta t}$

Indichiamo con

- z il tasso di variazione corrispondente ad un intervallo di tempo unitario →

  - $a = 1 + z \quad T = 1$

- α il tasso di variazione corrispondente ad un generico intervallo di tempo $\Delta t \rightarrow$
  - $a = 1 + \alpha \quad T = \Delta t$
- λ il tasso di variazione istantaneo, valore limite cui tende il tasso di variazione medio quando $\Delta t \rightarrow 0$

Se $y(0) = y_0$, all'istante t = kT sussistono le seguenti relazioni

$y(t) = y_0\,(1+z)^t$ $\qquad\qquad$ $y(t) = y(kT) = y_0(1+\alpha)^k = y_0(1+\alpha)^{\frac{t}{T}}$

Poiché i due valori, allo stesso tempo t, devono coincidere, possiamo scrivere

$$z = (1+\alpha)^{\frac{1}{T}} - 1$$

$$(1+z) = (1+\alpha)^{\frac{1}{T}}$$

$$\alpha = (1+z)^T - 1$$

Essendo il tasso di variazione medio è uguale a $\frac{(1+z)^{\Delta t} - 1}{\Delta t}$

il tasso di variazione istantaneo è λ= $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{(1+z)^{\Delta t} - 1}{\Delta t} = \ln(1+z) \rightarrow$

$$(1+z) = e^{\lambda}$$

$$per\ cui\ z = e^{\lambda} - 1$$

Essendo $1 + z = e^{\lambda}$, si può ricava una terza espressione per $y(t)$

$$y(t) = y_0\left(e^{\lambda}\right)^t = y_0 e^{\lambda t}$$

le tre espressioni

$$(1+z)^t \qquad\qquad y_0(1+\alpha)^{\frac{t}{T}} \qquad\qquad y_0 e^{\lambda t}$$

coincidono, come si può verificare direttamente.

In particolare, sostituendo a z e a α le rispettive espressioni in funzione di λ ,

$$z = e^{\lambda} - 1 \qquad\qquad \alpha = e^{\lambda T} - 1$$

le prime due si riducono alla terza che è la forma in cui vengono solitamente modellizzati i fenomeni esponenziali.

Confronto tra il tasso di variazione medio e quello istantaneo

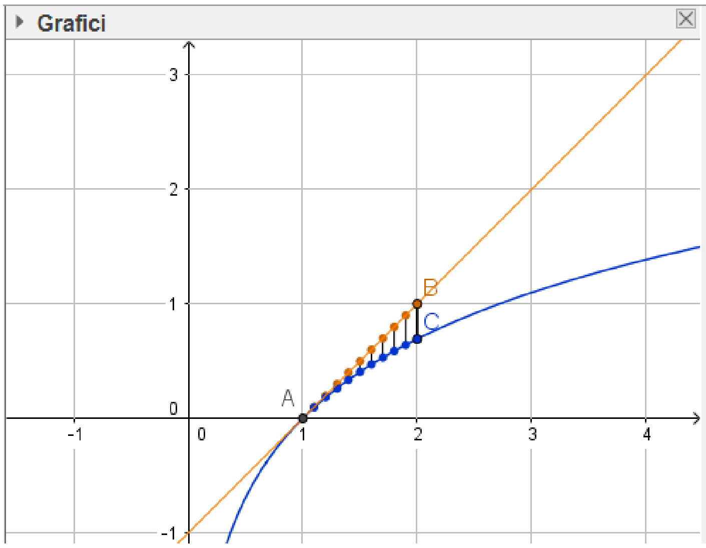
Il tasso di variazione istantaneo è non coincide con il tasso di variazione medio ma , se z è abbastanza piccolo si osserva che $\ln(1+z) \approx z$

Infatti

considerata la funzione $y = f(x) = \ln x$ e il punto $P(1; f(1)) ovvero\ P(1:0)$, indicato con z un incremento della variabile x, il termine $\ln(1+z)$ rappresenta l'incremento Δy della variabile y , mentre z è uguale al differenziale $dy = f'(1) * z = \frac{1}{1}z$, cioè l'incremento di y calcolato sulla retta tangente in P (Fig.2)

Sappiamo che l'approssimazione lineare dell'incremento di una funzione , a partire da un valore iniziale x_0 ,con il corrispondente differenzial,e è valido solo in un opportuno intorno di x_0 .

Nella tabella di Fig.2, si possono leggere i valori della lunghezza del segmento BC (differenza tra $dy - \Delta y$) al variare di x nell'intorno destro di 1.



Foglio di calcolo

	A	B	C	D	E
1	x(B)	y(B)	x(C)	y(C)	BC
2	1.2	0.2	1.2	0.18	0
3	1.3	0.3	1.3	0.26	0.02
4	1.4	0.4	1.4	0.34	0.04
5	1.5	0.5	1.5	0.41	0.06
6	1.6	0.6	1.6	0.47	0.09
7	1.7	0.7	1.7	0.53	0.13
8	1.8	0.8	1.8	0.59	0.17
9	1.9	0.9	1.9	0.64	0.21
10	2	1	2	0.69	0.26
11					

Fig.2

Esempi

Capitalizzazione composta
$C = C_0(1+i)^n$ dove
C_0 è il capitale iniziale
i è il tasso di interesse relativo a un determinato intervallo di tempo
n il numero di intervalli di tempo trascorsi

a)*Una somma C_0 è depositata in banca ad un tasso di interesse composto del 6% anuo.*

Quale sarà la somma di cui si potrà disporre dopo 3 anni? e dopo 3 mesi?

$z = i\ = 0{,}06$ è il tasso di variazione corrispondente ad un intervallo di tempo di 1 anno

α è il tasso di variazione corrispondente ad un intervallo di tempo $\Delta t = \frac{1}{4}$ di anno

La funzione $C(t)$ può essere espressa nella forma $C_0(1+0{,}06)^t$ o nella forma$C_0(1+\alpha)^{\frac{t}{4}}$

$$con\ \alpha = (1+i)^{\frac{1}{4}} - 1 \cong 0{,}014$$

dopo 3 anni $C = C_0(1+0{,}06)^3 \cong 1{,}191C_0$

dopo 3 mesi $C = C_0(1+0{,}06)^{\frac{1}{4}} \cong 1{,}014C_0$ $C \cong C_0(1+0{,}014) = 1{,}014C_0$

Il tasso di variazione istantaneo è in questo caso uguale a $\ln 1{,}06 \cong 0.058$, quindi differisce da quello unitario meno di 10^{-2}

La funzione $e^{0.06t}$ è una buona approssimazione della funzione $(1+0{,}06)^t$, come so osserva in Fig.3

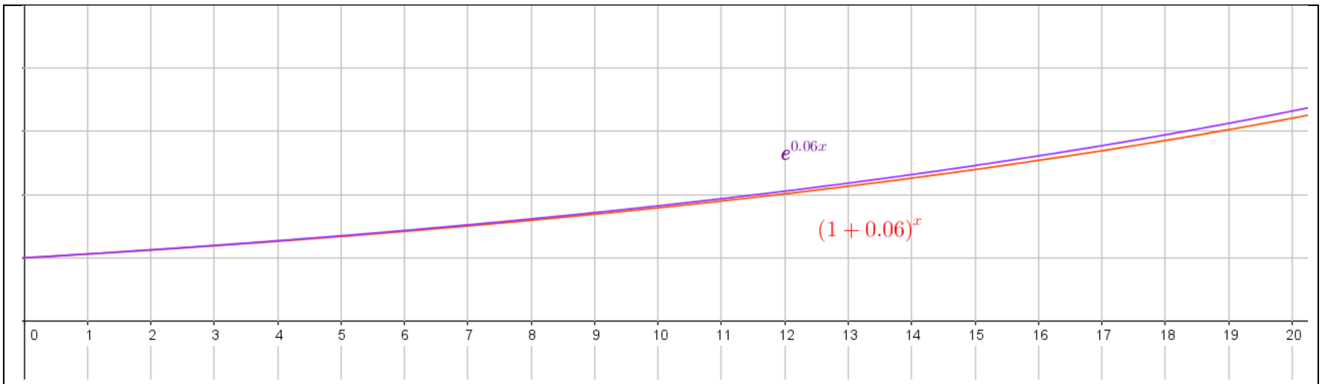


Fig.3

b) *Il funzionario di una banca convince un facoltoso cliente a investire una bella somma ad un tasso di interesse (composto) del 12% , pagabile una sola volta all'anno.*

Il cliente preferisce, invece, che lo stesso tasso di interesse sia applicato come tasso di interesse istantaneo. Perché?

Il tasso unitario è $i = 0{,}12$, pertanto, indicato con C_o il capitale iniziale e con t il tempo espresso in anni, il finanziamento proposto dalla banca si traduce nel modello matematico discreto

$$C(t) = C_0(1{,}12)^t$$

Il valore di λ , tasso di variazione istantaneo, è invece uguale a $\ln(1{,}12) \cong 0{,}11$

Il modello corrispondente alla richiesta del cliente è il modello continuo

$$C(t) = C_0 e^{0{,}12\,t}$$

che risulta per lui più vantaggioso , come si evince dal grafico di Fig.4

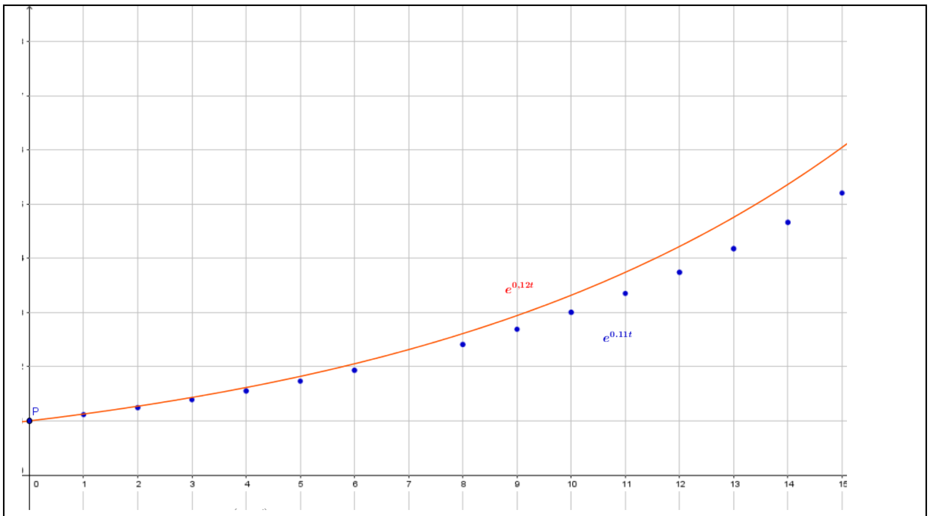


Fig.4