

PRACTICA INICIAL

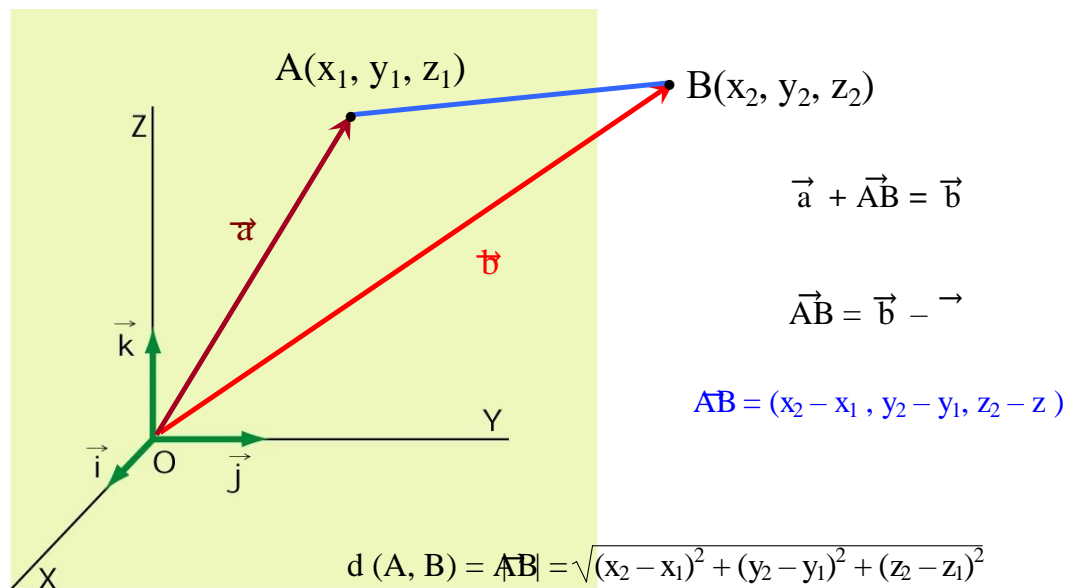
Esta práctica nos iniciará en el estudio de los objetos más simples en el espacio y el cálculo de sus distancias.

A la vez incorporaremos conceptos que nos permitirá trabajar con el software Geogebra 3D que permitirá verificar las fórmulas propuestas.

Sugerimos que previamente recorramos estos archivos:

- 1) Figuras [planas en el espacio](#)
- 2) [objetos en el espacio](#).

Todos los puntos siguientes van acompañados con un Applet de ejemplo que pueden utilizar para comparar y mejorar la presentación

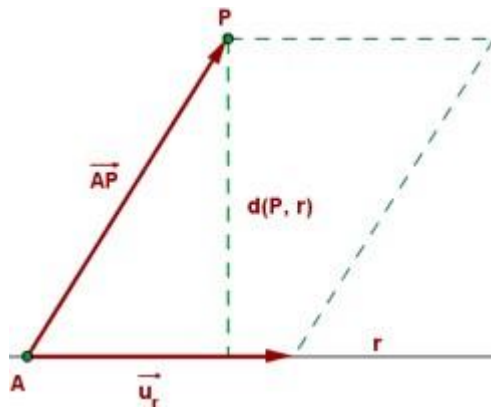
1-Distancia entre puntos**PROPUESTA DE TRABAJO**

Realiza un archivo GG para calcular la distancia entre puntos del espacio

2-Distancia entre un punto y una recta

La **distancia de un punto**, P , **a una recta**, r , es la menor de la distancia desde el punto a los infinitos puntos de la recta.

Esta distancia corresponde a la **perpendicular trazada desde el punto hasta la recta**.



$$\text{Área del paralelogramo} = \text{base} \times h \rightarrow h = \frac{\text{Área del paralelogramo}}{\text{base}}$$

Siendo la ecuación r , $r : ax + by + c = 0$

$$d(P, r) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Ejemplos

1. Hallar la **distancia** desde el **punto** $P(1, 3, -2)$ a la **recta**

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AP} = (1 - 2, 3 + 1, -2 - 1) = (-1, 4, -3)$$

$$\vec{u}_r = (3, 1, -2)$$

$$\vec{u}_r \times \overline{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + 11\vec{j} + 13\vec{k}$$

$$|\vec{u}_r \times \overline{AP}| = \sqrt{5^2 + 11^2 + 13^2} = 3\sqrt{35}$$

$$|\vec{u}_r| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$$

$$d(P, r) = \frac{3\sqrt{35}}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

2. Hallar la **distancia** desde el **punto** P(1, 2, 3) a la **recta**

$$r \equiv \frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{2}$$

$$A(2, 3, 4) \quad \overline{AP} = (1-2, 2-3, 3-4) = (-1, -1, -1) \quad \vec{u}_r = (4, 4, 2)$$

$$\vec{u}_r \times \overline{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$|\vec{u}_r \times \overline{AP}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8}$$

$$|\vec{u}_r| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = 6$$

$$d(P, r) = \frac{2\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

PROPUESTA DE TRABAJO

Realiza un archivo GG para verificar la distancia entre un punto y una recta cualquiera en el espacio

Veremos primero como se realiza [construcción de un plano](#) con el GG 3D

3- Distancia de un punto a un plano

La **distancia** de un **punto**, P, a un **plano**, π , es la menor de la distancia desde el punto a los infinitos puntos del plano.

Esta distancia corresponde a la **perpendicular trazada desde el punto al plano**.

$$P(x_0, y_0, z_0) \quad \pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Ejemplo

1. Hallar la distancia del punto P(3, 1, -2) a los planos $\pi_1 \equiv 2x + y - z + 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv 2y - 3 = 0$.

$$d(P, \pi_1) = \frac{|2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{6}}$$

$$d(P, \pi_2) = \frac{|2 \cdot 1 - 3|}{\sqrt{0^2 + 2^2 + 0^2}} = \frac{1}{2}$$

2. Hallar la distancia del punto Q(5, 5, 3) al plano $\pi \equiv (x, y, z) = (0, 0, -4) + (2, 2, -1)\lambda + (-3, 2, 0)\mu$.

$$\begin{vmatrix} x & 2 & -3 \\ y & 2 & 2 \\ z+4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad 2x + 3y + 10z + 40 = 0$$

$$d(Q, \pi) = \frac{|5 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + 10 \cdot 3 + 40|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 10^2}} = \frac{95}{\sqrt{113}}$$

PROPUESTA DE TRABAJO

Realiza un archivo GG para verificar la distancia entre un punto y un plano cualquiera en el espacio

4-Distancia de una recta al plano

Dada la recta r y el plano π

- Si la recta y el plano se cortan \rightarrow la distancia es cero
- Si no se cortan (la recta r y el plano son paralelos o la recta en el plano) \circ

$$d(r, \pi) = di(P, \pi), P \in r$$

•

5-Distancia entre planos paralelos

Para calcular la **distancia entre dos planos paralelos**, se halla la distancia de un punto cualquiera de uno de ellos al otro.

También se puede calcular de esta otra forma:

$$\pi_1 \equiv Ax + By + Cz + D_1 = 0 \quad \pi_2 \equiv Ax + By + Cz + D_2 = 0$$

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Ejemplo

1. Calcular la distancia entre los planos $\pi_1 \equiv 2x - y - 2z + 5 = 0$ y $\pi_2 \equiv 4x - 2y - 4z + 15 = 0$.

$$\frac{2}{4} = \frac{-1}{-2} = \frac{-2}{-4} \neq \frac{5}{15}$$

Los dos planos son paralelos.

Transformamos la ecuación del segundo plano para que los dos planos tengan el mismo vector normal.

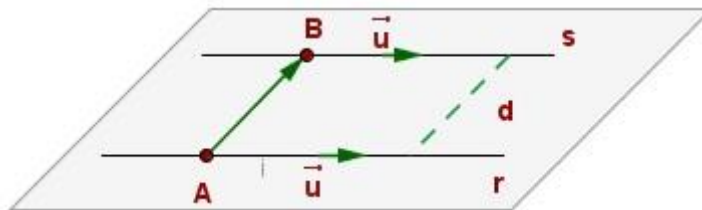
$$\pi_2 \equiv 2x - y - 2z + \frac{15}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad d(\pi_1, \pi_2) = \frac{\left| \frac{15}{2} - 5 \right|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{6}$$

PROPUESTA DE TRABAJO

Realiza un archivo GG para verificar la distancia entre un punto y una recta cualquiera en el espacio

6-Distancia entre dos rectas paralelas

La **distancia de una recta, r, a otra paralela, s**, es la distancia desde un punto cualquiera de r a s.

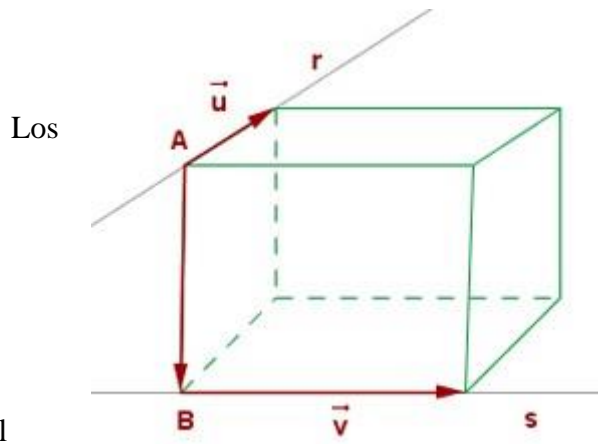


$$d(r, s) = d(A, s) = \frac{|\vec{u} \times \overline{AB}|}{|\vec{u}|}$$

Distancia entre dos rectas que se cruzan

La **distancia entre dos rectas que se cruzan** se mide sobre la **perpendicular común**.

Sean (A, \vec{u}) y (B, \vec{v}) las determinaciones lineales de las rectas r y s.



Los

determinan **paralelepípedo** cuya **altura** es la **distancia entre las dos rectas**.

El

volumen de un paralelepípedo es $V = A_b \cdot h$.

vectores \vec{AB}, \vec{u} y \vec{v}

Teniendo en cuenta el volumen es

el valor absoluto del producto mixto de los tres vectores y el área de la base es el producto vectorial de los vectores directores de las rectas, la altura, es decir, la distancia entre los dos puntos es igual a:

$$d(r, s) = h = \frac{V}{A_b} = \frac{|\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

Ejemplo

Hallar la mínima **distancia entre las rectas**:

$$r \equiv \frac{x+8}{2} = \frac{y-10}{3} = \frac{z-6}{1}$$

$$s \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{4}$$

$$A(-8, 10, 6) \quad \vec{u} = (2, 3, 1)$$

$$\vec{AB} = (9, -9, -5)$$

$$B(1,1,1) \quad \vec{v} = (-1,2,4)$$

$$V = \left[\left[\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v} \right] \right] = \begin{vmatrix} 9 & -9 & -5 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 136$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 10\vec{i} - 9\vec{j} + 7\vec{k}$$

$$A_b = \left| \vec{u} \times \vec{v} \right| = \sqrt{10^2 - 9^2 + 7^2} = \sqrt{230}$$

$$h = \frac{136}{\sqrt{230}} = \frac{68\sqrt{230}}{115}$$

PROPUESTA DE TRABAJO

Realiza un archivo GG para verificar la distancia rectas cualesquiera en el espacio
