Semipæne polynomier af n'te grad.

$$f(x) = x(x - 2mn)^{2n-1}$$

Sætning.

Betragt ovenstående polynomium $f(x) = x(x - 2mn)^{2n-1}$, med $n > 1\ og\ m, n \in \mathbb{N}$.

$f(x)$ har kun et enkelt ekstrema, som er et heltalligt globalt minimum i $x = m$, det har to heltallige vendepunkter i hhv. $(2mn, f(2mn))$ og $\left(2n, f(2n)\right)$. Der er vandret vendetangent med heltallig hældning i $(2mn, f(2mn))$.

Bevis.

$f(x) = x(x - 2mn)^{2n-1}$,

$$f'(x) = (x - 2mn)^{2n-1} + x(2n-1)(x-2mn)^{2n-2}$$
$$= (x-2mn)^{2n-2}(x - 2mn + x(2n-1))$$

$$= (x-2mn)^{2n-2}(x - 2mn + 2nx - x) = (x-2mn)^{2n-2}(2nx - 2mn)$$
$$= 2n(x-2mn)^{2n-2}(x-m)$$

$$f'(x) = 2n(x-2mn)^{2n-2}(x-m)$$

$$f''(x) = 2n\left((x-2mn)^{2n-2} + (2n-2)(x-2mn)^{2n-3}(x-m)\right)$$

$$= 2n(x-2mn)^{2n-3}(x - 2mn + (2n-2)(x-m))$$

$$= 2n(x-2mn)^{2n-3}(x - 2mn + 2nx - 2mn - 2x + 2m)$$

$$= 2n(x-2mn)^{2n-3}(2nx - x - 4mn + 2m)$$

$$= 2n(x-2mn)^{2n-3}((2n-1)x - 2m(2n-1))$$

$$= 2n(2n-1)(x-2mn)^{2n-3}(x-2m)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2mn \vee x = 2m$$

Heine Strømdahl, 26-11-2023.